Lycée Pilote Sfax	**Série N°33**	$4^{\text{ème}}$ Math
A/S : 2020-2021	(Divisibilité dans $\mathbb{Z}$)	Mr Jellali

Exercice 1

On se propose de déterminer l'ensemble E des entiers naturels n supérieur ou égal à 2 tels que $3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{n}$.

① Soit n un élément de E et p le plus petit diviseur premier de n.

a) Montrer que $3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{p}$.

b) En déduire que $p \geq 5$.

② Montrer que $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

③ a) Montrer qu'il existe deux entiers naturels non nuls a et b tels que $an - b(p-1) = 1$.

b) En désigne par r et q respectivement le reste et le quotient de a par $p-1$.

Montrer qu'il existe un entier naturel k tel que $rn = 1 + k(p-1)$.

④ Conclure.

Exercice 2

1) Soit n un entier naturel non nul tel que $n \wedge 5 = 1$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $n^{4k} \equiv 1 \pmod{5}$.

2) Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $b = a + 4p$, $p \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^b \equiv n^a \pmod{5}$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^b \equiv n^a \pmod{10}$.

3) Soit x et y deux entiers tels que $x = 11k - 1$ et $y = 3k - 1; k \in \mathbb{N}^*$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n^y et n^x ont le même chiffre des unités.

Exercice 3

1. Soit E l'ensemble des couples des entiers naturels non nuls (a, b) tels que $a^2 = b^3$.
   Vérifier que E et non vide.
2. Soit $(a, b) \in E$. On note $d = a \wedge b$ et on désigne par a' et b' les entiers tels que $a = da'$ et $b = db'$.
   a. Montrer que $a'^2 = db'^3$.
   b. En déduire que $b' = 1$.
3. Montrer que $(a, b) \in E$ si et seulement si a et b sont respectivement le cube et le carré d'un même entier.
4. Montrer que si n est le carré d'un entier naturel et le cube d'un autre entier naturel alors $n \equiv 0 \pmod{7}$ ou $n \equiv 1 \pmod{7}$.

Exercice 4

Soit m et n deux entiers naturels non nuls qui vérifient la relation $(F): 7^n - 3 \times 2^m = 1$.

1. On suppose que $m \leq 4$. Déterminer tous les couples (m, n) qui vérifient (F).
2. On suppose que $m \geq 5$.
   a. Montrer que si le couple (m, n) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{32}$.
   b. Montrer que si le couple (m, n) vérifie la relation (F) alors n est un multiple de 4.
   c. En déduire que si le couple (m, n) vérifie la relation (F) alors $7^n \equiv 1 \pmod{5}$.
   d. En déduire qu'il n'existe aucun ... (F).