Lycée Pilote Sfax A/S : 2020-2021	**Série N°32** (Divisibilité dans $\mathbb{Z}$)	$4^{ème}$ Math Mr Jellali

Exercice 1

1) Soit n un entier naturel .
 a) Déterminer suivant n le reste modulo 7 de 2^n .
 b) Déterminer le reste modulo 7 de l'entier 107^{2009} .
 c) Déterminer les entiers naturels n tels que $107^n + 107^{2n} + 107^{3n}$ soit divisible par 7.
2) Soit a un entier naturel non divisible par 7.
 On désigne par k le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod 7$.
 a) Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod 7$.
 b) Quelles sont alors les valeurs possibles de k.
3) A tout entier naturel n, on associe le nombre $A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$. Montrer que $A_{2012} \equiv 6 \pmod 7$.

Exercice 2

Soit p un nombre premier tel que $p \geq 5$.

On se propose de déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels non nuls tels que $px + y^{p-1} = 2017$.

① Montrer que $p < 2017$.
② Montrer que 2017 est un nombre premier.
③ Montrer que p ne divise pas y.
④ a) Montrer que $y^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.
 b) En déduire que p divise 2016.
 c) Montrer alors que $p = 7$.
⑤ Conclure.

Exercice 3

I/ Soit a et b deux entiers naturels non nuls tels que $a^3 + b^3 \equiv 0 \pmod{173}$.

① Vérifier que 173 est premier.

② Montrer que $a^{171} \equiv -b^{171} \pmod{173}$.

③ a) Montrer que 173 divise a si et seulement si 173 divise b.

 b) Montrer que si 173 divise a alors 173 divise $a + b$.

④ On suppose que 173 ne divise pas a.

 a) Montrer que $a^{172} \equiv b^{172} \pmod{173}$.

 b) Montrer que $a^{171}(a + b) \equiv 0 \pmod{173}$.

 c) Montrer que 173 divise $a + b$.

II/ Soit $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \text{ tel que } x^3 + y^3 = 173(xy + 1)\right\}$.

① Soit $(x, y) \in E$.

 a) Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x + y = 173k$.

 b) Montrer que $k(x - y)^2 + (k - 1)xy = 1$.

 c) En déduire que $k = 1$.

② Déterminer l'ensemble E.