Exercice 1

Résoudre dans Z les équations

$E_1: 3x \equiv 10[17]$ $E_2: x^2 + 3x + 13 \equiv 0[17]$

Exercice 2

2)/ Montrer les équivalences : $a^3 \equiv 0\ [9]$ équivaux à $a \equiv 0\ [3]$

$a^3 \equiv 1\ [9]$ équivaux à $a \equiv 1\ [3]$

$a^3 \equiv 8\ [9]$ équivaux à $a \equiv 2\ [3]$

3)Montrer alors que si $x^3 + y^3 + z^3 \equiv 0\ [9]$ alors x ou y ou z est divisible par 3

Exercice 3

1) a. Déterminer les restes modulo 7 des puissances de 10

b. En déduire le reste modulo 7 de 10^{3^n}, $n \in \mathbb{N}^*$

2) Soit n un entier naturel d'au moins trois chiffres et dont l'écriture décimale est

$a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$ et soit $d = a_n a_{n-1} \dots a_1$

a. Montrer que n est divisible par 7 si et seulement si $d - 2a_0$ est divisible par 7

b. Le nombre 881909 est-il divisible par 7

Exercice 4

On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $E: 2(y-1)^2 = 7x + 2$

1) Montrer que $y \equiv 0[7]$ ou $y \equiv 2[7]$

2) En déduire alors les solutions de E

Exercice 5

Soit x un entier

1) Montrer que si $x \equiv 1[7]$ alors $x^7 \equiv 1[49]$

2) Dans cette question on suppose que $x^7 \equiv 1[49]$ montrer que $x \equiv 1[7]$

3) Résoudre alors dans Z l'équation $(E): x^7 \equiv 1[49]$

Exercice 6

1) Soit p un entier naturel non nul $p \geq 3$, $a \in \mathbb{Z}$ et r un entier naturel non nul

Montrer que si $a \equiv 1[p^r]$ alors $a^p \equiv 1[p^{r+1}]$

2) dans cette question on suppose que $a \wedge 10 = 1$. Montrer que $a^4 \equiv 1[10]$

3) a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a $a^{4.10^n} \equiv 1[10^{n+1}]$

b. En déduire que $a^{8.10^n+1} \equiv a[10^{n+1}]$

c. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que N^3 se termine par 123456789

Exercice 7

On se propose de déterminer l'ensemble F des couples (n, m) d'entiers naturels non nuls tels que $7^n - 3.2^m = 1$

1). On suppose $m \leq 4$. Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2). On suppose maintenant que $m \geq 5$.

Montrer que si le couple (n, m) est un élément de (F) alors $7^n \equiv 1 \ (mod\ 32)$.

3) a. En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7puis déduire que n est divisible par 4

b. En déduire alors $7^n \equiv 1 \ (mod\ 5)$.

c. Pour $m \geq 5$, existe-t-il des couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant la relation (F) ?. Conclure

Exercice 8

Soit m un entier naturel tel que $10^m \equiv 2[19]$

1) a. Déterminer les restes modulo 19 de 10^2 , 10^3 , 10^6 et 10^9

b. Montrer que $10^{m+1} \equiv 1[19]$ et que $10^{18} \equiv 1[19]$

2) Soit $d = (m+1) \wedge 18$ on admet qu'il existe deux entiers naturel u et v tel que

$$18u - (m+1)v = d$$

a. Montrer que $10^d \equiv 1[19]$

b. En déduire que $d = 18$

c. Déterminer alors les valeurs de m

3) Soit n un entier naturel supérieur à 2 et $A_n = \underbrace{11\ldots\ldots\ldots111}_{n\ fois}$

a. Vérifier que. $9A_n = 10^n - 1$

b. Montrer que $A_n \equiv 0[19]$ si et seulement si $10^{n-1} \equiv 2[19]$

c. Détermine les valeurs de n pour les quelles $A_n \equiv 0[19]$

Exercice 9

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$ et P un entier premier avec $P > 5$.

1) Déterminer les valeurs de n pour les quelles $a_n \equiv 0[3]$

2) Montrer que $a_{2n} \equiv 2(-1)^n[5]$ et $a_{2n+1} \equiv 0[5]$

3) Montrer que pour tout $k \in \{1,2,3, \ldots, P-1\}$ on a :$k^{P-1} \equiv 1[P]$

4) En déduire que P divise a_{P-2}.

Exercice 10

On pose $U_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n$, $n \in \mathbb{N}$ et $E = \{2, 3, 4, 5, 6\}$

On appelle ordre de $a\ (mod\ 7)$ le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1[7]$

1) Montrer que pour tout $a \in E$ on a $a^6 \equiv 1[7]$
2) Soit $k \in E$, k l'ordre de $a\ (mod\ 7)$ et r le reste de la division euclidienne de 6 par k
   C'est-à-dire $6 = kp + r$
   a) Montrer que $a^r \equiv 1[7]$
   b) En déduire que k divise 6
3) a) Déterminer suivant les valeurs de n le reste modulo 7 de a^n pour tout $a \in E$
   b) En déduire suivant les valeurs de n le reste modulo 7 de U_n
4) a) Déterminer le reste modulo 7 de U_{2015}
   b) Déterminer le reste modulo 7 de $S = 1 + 2^{2015} + 3^{2015} + 4^{2015} + \cdots . +2015^{2015}$

Exercice 11

On considère la suite d'entiers naturels définie par $\cdot\ u_0 = 14$ et $u_{n+1} = 5u_n - 6$

1) Quelle conjecture peut-on émettre sur les deux derniers chiffres de (u_n) ?

2) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n[4]$

3) En détruire que pour tout entier naturel k on a $u_{2k} \equiv 2[4]$ et $u_{2k+1} \equiv 0[4]$

4) a. Montrer que pour tout entier naturel n on a $2u_n = 5^{n+2} + 3$

   b. En déduire que pour tout entier naturel on a $2u_n \equiv 28[100]$

   c. Valider la conjecture

Exercice 12

1) Montrer que 2017 est premier et décomposer 2016 en facteurs premiers

2) Soit x et y deux entiers naturels non nuls, p un nombre premier supérieur ou égale a 7

   et E: $px + y^{p-1} = 2017$

   a. Vérifier que $p < 2017$ et que $p \wedge y = 1$

   b. Montrer que $y^{p-1} \equiv 1[p]$puis déduire que p divise 2016

3) a. Montrer $p = 7$

   b. Résoudre E