L'arithmétique, c'est être capable de compter jusqu'à vingt sans enlever ses chaussures . ***Walt Disney***

Exercice 1:

Soit p un nombre premier.

1)Montre que pour tout k $\in\{1,2,...,p-1\}$ on a $C_p^k \equiv 0$ (mod p)

2)Montrer alors que pour tout entier naturel a on a : $a^p \equiv a$ (mod p)

3)Démontrer que pour tout entier n, n^5-n est divisible par 10

4)a)Soit a et b deux entiers naturels Traduire en terme de congruence la propriété : a et b ont le même chiffre des unités

b)Soit n $\in$IN et p $\in$IN*

Démontrer que n^{p+4} et n^p ont le même chiffre des unités

Exercice 2 : **Vrai ou Faux**

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou si elle est fausse en justifiant la réponse. Dans ce qui suit a, b et c trois entiers.

1)Si $a^2 \equiv b^2$ (mod 8) alors $a \equiv b$ (mod 8)

2)Si $2a \equiv 2b$ (mod 8) alors $a \equiv b$ (mod 8)

3) Si a divise b et a divise c alors a² divise bc

4)Le reste de la division euclidienne de 2^{2010} par 11 est égal à 1

5)Si un entier x est telle que : $x^2+x \equiv 0$ [mod 6] alors $x \equiv 0$ [mod 3]

6)Pour tout n, on pose $a_n = 2^n + 3^n$ alors $a \equiv 0$(mod5) pour tout n impair

7)Si $2a \equiv 2b$ (mod 7) alors $a \equiv b$ (mod 7)

8)Pour tout entier naturel n:
$5^{6n+1} + 2^{3n+1}$est divisible par 7.

9) : « Le reste de la division euclidienne de 2011^{2011} par 7 est 2 ».

11)

a) $x^3 \equiv x$ (mod 2).

b) Si $x \equiv 2$ (mod 14) alors $x \equiv 1$ (mod 7).

c) Si $4x \equiv 10y$ (mod 5) alors $x \equiv 0$ (mod 5).

12) $\sum_{k=1}^{2017} k! = 3$ [10]

13) Sachant que 2011 est premier. On a : $2013^{2017} \equiv 1$ [2017]

14) Soit x un entier.

Si $x^2 \equiv 1$ [9] alors $x \equiv 1$ [3]

Exercice 3 :

Compléter le tableau des restes dans la congruence modulo 5.

n ≡	0	1	2	3	4
n² ≡					

Déduire que l'équation $x^2 - 5y^2 \equiv 3$ [5], avec x et y entiers naturels , n'admet pas de solution.

Exercice 4:

1)a) Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 3 de 2^n.

b)Déterminer le reste modulo 3 de $(40502)^{2009}$

2)a)Mque pour tout n de IN, $5^{2n} \equiv 1$ (mod3)

b)Déterminer l'ensemble des entiers naturels tels que $2^n-5^{2n} \equiv 0$(mod3)

3)Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que :$(40502)^n-(40525)^n \equiv 3$(mod3)

Exercice 5 :

Soit n$\in$IN

1)Démontrer que le chiffre de unités de n est donné par le reste de la division euclidienne de n par 10

2)a)Déterminer les restes possibes de 3^n (mod10).

b)Quel est le chiffre des unités de $N_1=3^{1029}$

c)Quel est le chiffre des unités de

$N_2=373^{2531} \times 2353^{190}$

3)a)Déterminer, suivant les valeurs de n, le reste modulo 10 de 7^n.

b)En déduire le chiffre des unités du nombre 43578707^{4327}

4)Soit n ≥2

a)Démontrer par récurrence que le reste de la division euclidienne de 6^n par 10 est 6

b) Quel est le chiffre des unités de 9^n

c)En déduire le chiffre des unités de $N_3=426^{1259} \times 859^{12235}$

5)Quel est le chiffre des unités de $6^n \times 9^n$

Exercice 6 :

a et b deux entiers tels que

$a \equiv 5$ (mod 7) et $b \equiv 3$ (mod 7).

Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 de :

a) 2a + 5b b) a² + 11b c) a² + 3 b²

Exercice 7:

1) Quel est le reste de division euclidienne de 6^{943} par 7.

2) Quel est le reste de division euclidienne de 247^{349} par 7.

Exercice 8:

Soit a et b deux entiers non nuls et n un entier naturel impair.

1)a)Démontrer que a+b divise a^n+b^n

b)En déduire que 15 divise $2^{45}+5^{45}+10^{45}+13^{45}$

2)Prouver, sans effectuer de division, que 14 divise 1064

Exercice 9 :

Montrer que pour n entier naturel, $(n+1)^n-1$ est divisible par n^2 .

Exercice 10:
Montrez que pour tout entier naturel n, $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.
Montrez que pour tout n entier naturel, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7

Exercice 11:
Déterminez l'ensemble des x entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.

Exercice 12 :
Démontrer que $2^{770} - 5^{2477} \equiv 1$ (mod 7)

Exercice 13 :
x et y désignent des entiers.
a)Dque $x^2 \equiv 0$ (mod 8) ou $x^2 \equiv 1$(mod 8) ou $x^2 \equiv 4$(mod8)
b)en déduire les restes possibles de la division euclidienne de $x^2 + y^2$ par 8

Exercice 14:
Déterminer tous les entiers n tels que
$n^2 \equiv 4 - 2n$ (mod 5)

Exercice 15 :
On considère le système de congruences
$\begin{cases} n \equiv 2\ (mod\ 3) \\ n \equiv 1\ (mod 5) \end{cases}$; où n désigne un entier relatif.
1. Montrer que 11 est solution de (S).
2. Montrer que si n est solution de (S) alors n − 11 est divisible par 3.
3. Montrer que les solutions de (S) sont tous les entiers de la forme 11 + 15 k, où k désigne un entier relatif.

Exercice 16 ;
Les quatre questions sont indépendantes.
1° Résoudre dans Z, l'équation $x^2 + x \equiv 5$ [7]
2° a)Montrer que, pour tout entier naturel n, $7^{2n} \equiv 1$ [8]
b)En déduire le reste modulo 8 de 2009^{2010}
3°Déterminer les entiers naturel n tels que
$27 \equiv 5$ [n]

Exercice 17:
1)Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, les restes possibles modulo 7 de 2^n.
2)Montrer que pour tout n є IN, $2^{3n} - 1 \equiv 0$(mod7).
3)Quel est le reste modulo 7 de 1773^{704}
4)Montrer que pour tout n є IN, on a
$3 \cdot 11^{n+1} + 5^{2n+4} \equiv 0$ (mod7).

Exercice 18:(4 points)
On considère dans IN l'équation (E) : $x^{35} \equiv 2$ [97].
1) Soit x une solution de (E).
a) Vérifier que 97 est premier.
b) Montrer que x et 97 sont premiers entre eux.
c) Justifier que $x^{96} \equiv 1$ [97].
d) En déduire que $x \equiv 2^{11}$ [97].
2) Soit un entier x tel que $x \equiv 2^{11}$ [97]. Montrer que x est solution de (E).
3) Déduire alors l'ensemble des solutions de l'équation (E).

Exercice 19:
Soit x un entier vérifiant $\begin{cases} n \equiv 3\ (mod\ 8) \\ n \equiv 2\ (mod 5) \end{cases}$;
a) Montrer que $3x \equiv 1$ (mod 40)
b) En déduire qu'il existe un entier k tel que x=40k-13
c) Déterminer, lorsque x > 0, le chiffre des unités de x.

Exercice 20:
Soit a $=\sum_{k=0}^{9} 2011^k$
1) Vérifier que 2011≡ 11 (mod 100)
2) a) Déterminer le reste de 11^n modulo 100.
b) Déduire qu'il existe q de IN tel que
a = 100q+60.
3) Soit N = $\sum_{k=0}^{2009} 2011^k$
a) Montrer que N ≡ 201 a (mod 100)
b) Déterminer alors les deux derniers chiffres de N.

Exercice 21 : (6 points).
On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :
$u_n = 2^n + 3.7^n + 14^n - 1.$
1) a) Calculer u_3.
b) Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est pair.
c) On note E l'ensemble des nombres premiers qui divisent au moins un terme de la suite (u_n). Les entiers 2, 3, 5 et 7 appartiennent-ils à l'ensemble (E) ?.
2) Soit p un nombre premier strictement supérieur à 7.
Soient m et n deux entiers naturels tels que 14 = m.n.
a) Quelles sont les valeurs possibles de m?
b) Montrer que $14m^{p-2} \equiv n\ (mod\ p\ )$.
c) En déduire que $14u_{p-2} \equiv 0\ (mod\ p\ )$.
d) L'entier p appartient-il à l'ensemble E ?
e) Déterminer alors E.

Exercice 22 :(5 points)
a) Etudier selon n les restes possibles de 4^n par 11.
b) Résoudre alors le système
$\begin{cases} 4^{5n} + 4^n + n \equiv 0\ [11\ ] \\ n \equiv 2\ [10\ ] \end{cases}$.