Similitudes

Exercice 1 :

Soit $ABCD$ un carré direct de centre O

On désigne par $I = O * B$, $J = B * C$

$E = S_{(BC)}(O)$ et $\{\Omega\} = (AE) \cap (BC)$

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f telle que $f(A) = C$ et $f(O) = E$

   b) Caractériser f

   c) soit $K = f(I)$, montrer que K est le milieu de $[BE]$ et en déduire que O, Ω et K sont alignés.

2) Soit g l'antidéplacement tel que $g(A) = C$ et $g(O) = E$

   Montrer que g est une symétrie glissante puis donner ses éléments caractéristiques

3) Soit $h = h\left(A, \frac{1}{2}\right)$ et $\varphi = h \circ f$

   a) Montrer que φ est une similitude directe dont on précisera le rapport et une mesure de son angle.

   b) Montrer que φ admet un centre qu'on notera ω puis caractériser $\varphi \circ \varphi$

   c) Déterminer $\varphi \circ \varphi(A)$. En déduire une construction de ω

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct : on désigne par A', B' et C' les milieux de $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$

Soit Δ la droite parallèle à (BC) passant par A

E et F désignent les projetés orthogonaux de B et C sur Δ

1) Montrer que A est le milieu de $[EF]$

2) a) Montrer qu'il existe un antidéplacement unique f qui transforme E en A' et A en C

   b) Caractériser f

   c) Montrer que $f(B) = A$ et déterminer $f(A')$

   d) On pose $G = f(C)$. Montrer que F est le milieu de $[AG]$

3) soit $g = S_{\Delta} \circ f$. Caractériser g

4) Soit D le symétrique de A par rapport à C et S la similitude directe qui transforme C' en C et B en D
   a) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S
   b) Montrer que A est le centre de S
   c) Déterminer $S(E)$
5) On pose $\varphi = f \circ S$
   a) Montrer que φ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport
   b) Déterminer $\varphi(E)$ et $\varphi(A)$ puis en déduire une construction de Ω centre de φ et de l'axe δ de φ

Exercice 3 :

Soit $OO'CB$ un rectangle de centre L' tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OO'},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$, $OO' = 2OB$

K le milieu de $[OB]$ et A le milieu de $[OO']$ et $D = S_O(B)$

1) Soit f la similitude directe qui transforme C en O et O' en K
   Déterminer les éléments caractéristiques de f. On notera Ω son centre
2) a) Prouver que $\Omega \in (AB)$
   b) On pose $g = f \circ S_{(AB)}$ déterminer la nature, le centre et le rapport de g.
3) Soit $C' = f(D)$
   a) Montrer que $C' = g(C)$
   b) Préciser alors l'axe de g

Exercice 4 :

Soit $ADBC$ un rectangle tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et $AD = 2AC$

Soit $I = B * C$ et $J = A * D$

Soit S la similitude directe tel que $S(D) = J$ et $S(J) = C$

1) Montrer que son rapport est $\sqrt{2}$ et son angle est $-\frac{\pi}{4}$
2) Soit Ω le centre de S. Montrer que $\Omega C = 2\Omega D$ et que $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega D},\overrightarrow{\Omega C}}\right) \equiv -\frac{\pi}{2}[2\pi]$ puis déduire que $\Omega = B$

3) Soit S' la similitude directe de centre C, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$
   a) Déterminer l'image de D par $S' \circ S$
   b) Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de $S' \circ S$
4) Soit $E = S_B(D)$, on pose $f = S \circ S_{(BC)}$
   a) Déterminer $f(E)$
   b) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 5 :

On considère un rectangle $OABC$ de centre H tel que : $OA = 2OC$ et $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On pose $I = O * A$ et $J = B * C$

La perpendiculaire menée de I à la droite (OB) rencontre (BC) en D

Soit S la similitude directe telle que : $S(O) = I$ et $S(A) = J$

1) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S
2) Déterminer $S(B)$ en utilisant $S((OB))$ et $S((AB))$
3) Construire $E = S(C)$
4) Soit Ω le point d'intersection de (OB) et (ID). Montrer que Ω est le centre de S.
5) Soit σ la similitude indirecte de centre Ω telle que $\sigma(\mathrm{I}) = \mathrm{O}$
   a) Déterminer le rapport de σ et montrer que σ a pour axe la médiatrice de $[IK]$
      Où $K = O * \Omega$.
   b) Soit $= S \circ \sigma$. caractériser f
6) Justifier l'existence d'une similitude indirecte g telle que $g(I) = B$ et $g(J) = \Omega$
   a) Montrer que g admet un centre ω
   b) Montrer que $h = g \circ g$ est une homothétie.
   c) Montrer que $g((BD)) = (ID)$ et en déduire que $g((ID)) = h((BD)) = (BD)$
   d) Déterminer alors le centre et l'axe de g

Exercice 6 :

Soit $ABCD$ un carré de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On note I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AD]$

1) Soit S la similitude directe telle que $S(D) = O$ et $S(C) = I$
   a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S
   b) Soit Ω le centre de S. Trouver une construction géométrique de Ω.
2) a) Préciser les images respectives par S des droites (BD) et (BC)
   b) Déterminer alors $S(B)$ et $S(A)$
   c) Déterminer $S \circ S(B)$ et caractériser $S \circ S$. En déduire que Ω est le barycentre des points pondérés $(B, 1)$ et $(J, 4)$.
3) On suppose dans cette question que $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ est un repère O.N.D
   a) Déterminer l'expression complexe de S
   b) Déduire l'affixe z_0 du centre Ω de S
4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $h = R \circ S$
   a) Préciser $h(B)$ puis caractériser h
   b) On note Ω' le milieu de $[\Omega B]$. Montrer que le triangle $O\Omega\Omega'$ est rectangle isocèle.
5) Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(D) = O$ et $\sigma(C) = I$
   a) Vérifier que $\sigma = S_{(OI)} \circ S$ puis déterminer $\sigma(B)$
   b) Déterminer alors la forme réduite de σ.

Exercice 7 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A et de sens direct.
On note I et J les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BC]$

1) Soit S la similitude directe telle que $S(A) = C$ et $S(C) = B$
   a) Préciser le rapport et l'angle de S
   b) soit Ω le centre de S. Montrer que $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega C} = \overrightarrow{\Omega A}^2$. En déduire $\overrightarrow{\Omega A} \perp \overrightarrow{\Omega I}$
   c) Déterminer $S \circ S(A)$. En déduire Ω est le projeté orthogonal de A sur (BI)
2) Soit S' la similitude directe de centre B tq $S'(A) = C$
   a) Préciser le rapport et l'angle de S'
   b) Identifier alors l'application $R = S' \circ S^{-1}$
   c) On note $K = R(A)$. Donner la nature du quadrilatère $ABKC$
      En déduire que $S^{-1}(A) = J$
3) On pose $\sigma = S \circ S_{(BC)}$ et $\Omega' = S_K(B)$
   a) Préciser $\sigma(K)$ et $\sigma(C)$

b) en déduire que σ est une similitude indirecte de centre Ω', dont on précisera le rapport et l'axe.

4) On suppose que $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère orthonormé direct du plan.

a) Déterminer les transformation complexes de S et σ

b) En déduire que A, Ω et Ω' sont alignés.

Exercice 8 :

On considère dans le plan orienté, un losange $ABCD$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

Les triangles ABD et BCD ont pour centres respectifs les points O et O'

Soit $A' = B * D$ et $E = B * C$

1) Soit M un point de $[AD]$, $M \neq A$ et $M' \in [DC]$, $M' \neq D$ tel que $AM = DM'$

a) Montrer qu'il existe une seule rotation R tel que $R(A) = D$ et $R(M) = M'$
Caractériser R

b) Soit $I = M * M'$
Montrer que I est l'image de M par une similitude directe S à caractériser.
En déduire l'ensemble des points I lorsque M varie.

2) On considère la similitude directe f de centre E tel que $f(B) = O'$

a) Déterminer l'angle de f.

b) Déterminer $f\big((BD)\big)$ et $f\big((ED)\big)$. En déduire $f(D)$

c) Montrer que $f(A') = A''$ est le milieu de $[O'C]$ et déduire que $(A'E)$ est tangente au cercle de diamètre $[O'C]$.

3) On considère le point F défini par $AF = 2AA'$ et $(\widehat{\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AF}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

a) Soit la similitude indirecte φ telle que $\varphi(A') = A$ et $\varphi(A) = F$
Déterminer le rapport de φ.

b) Soit Ω le centre de φ. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre $[OC]$

c) Montrer que $\varphi \circ \varphi$ est une homothétie, déduire que $\Omega \in (A'F)$ et que $\Omega \notin [A'F]$.

d) Construire Ω et l'axe Δ de φ

Exercice 9 :

Dans le plan orienté P , on considère un carré $ABCD$ de centre O et tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

Soient I et J les milieux respectifs de $[OB]$ et $[BC]$ et soit E le symétrique de O par rapport à (BC) et Ω le point d'intersection de (BC) et (AE)

1) a) Vérifier que $OABE$ est un parallélogramme de centre I et que $OBEC$ est un carré direct de centre J.

   b) En utilisant le théorème de Thalès, montrer que $\frac{\overline{IA}}{\overline{I\Omega}} = \frac{\overline{ID}}{\overline{IB}} = -3$. En déduire que Ω est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(I, -4)$

2) Soit S la similitude directe qui transforme A en C et C en E.
   a) Déterminer le rapport k et l'angle θ de S
   b) Soit ω le centre de S. Montrer que ω, A et E sont alignés et que $\omega \in \mathcal{C}[AC]$. En déduire une construction de ω.
   c) Montrer que $(\omega J) \perp (\omega B)$ (on pourra déterminer (B))
   d) Soient f la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et $h = h\left(A, \frac{1}{2}\right)$.
   Montrer que $S = f \circ h$

3) Soit $g = S \circ h' \circ S_{(AC)}$ où h' est l'homothétie de centre A et de rapport 2.
   a) Déterminer $g(A)$ et $g(O)$
   b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

4) Soit $\sigma = h \circ g$
   a) Montrer que σ est une similitude indirecte dont on précisera le rapport
   b) Caractériser $\sigma \circ \sigma$ (on notera ω' le centre de σ)
   c) Montrer que $\sigma \circ \sigma(A) = I$ et en déduire que Ω est le centre de σ.
   d) La droite $(O\Omega)$ coupe (AD) en K. Montrer que l'axe de σ est la médiatrice de $[AK]$

Exercice 10 :

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que $\widehat{(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})} = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, $AB = 3$ et $BC = 4$

1) Soit f la similitude directe telle que $f(A) = B$ et $f(B) = C$
   a) Déterminer l'angle et le rapport de f
   b) Soit H le projeté orthogonal de B sur (BC)
   Montrer que H est le centre de f

2) Soit $D = f(C)$
   a) Montrer que $D \in (BH)$.
   b) Construire le point D

3) Soit g la similitude indirecte qui transforme A en B et B en C.

   on désigne par Ω le centre de g

   a) Montrer que $f \circ g^{-1} = S_{(BC)}$

   b) Soit $E = g(C)$. Déterminer $S_{(BC)}(E)$. Construire alors E.

   c) Préciser la nature de $g \circ g$. Montrer que $\Omega \in (AC) \cap (BE)$

   d) Construire Ω et l'axe Δ de g

Exercice 11 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct ABC rectangle en B tq $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \alpha[2\pi]$

où $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

On désigne par H le projeté orthogonal de B sur (AC)

H' le symétrique de H par rapport à la droite (BC)

Soit $I = A * B$ et $J = B * C$

1) Soit S la similitude directe de centre H qui envoie A en B

   a) Caractériser la similitude S

   b) Déterminer les images de B et I par S

2) Soit σ la similitude indirecte qui envoie A en B et B en C

   a) Montrer que σ admet un centre $\Omega \in (AC)$

   b) Caractériser $g = \sigma \circ S^{-1}$

   c) Déduire $\sigma(H)$ et déduire que $\Omega \in (BH')$

   d) Construire Ω.

3) On désigne par $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle HBA et par $(\mathcal{C}')$ le cercle circonscrit au triangle HBC.

   Soit φ la similitude indirecte de centre H qui transforme $(\mathcal{C})$ en $(\mathcal{C}')$

   a) Soit $M \in (\mathcal{C})$, on pose $M' = S(M)$ et $M'' = \varphi(M)$

      Montrer que M, B et M' sont alignés.

   b) Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à une droite Δ que l'on précisera, puis construire le point M''

   c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\sigma \circ \varphi^{-1}$

Exercice 12 :

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2AD$ et $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

On pose $= S_C(B)$, $I = C * D$ et $J = S_C(I)$

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$

I / Soit f la similitude directe telle que $f(A) = C$ et $f(B) = E$

1) a) Déterminer le rapport et l'angle de f

   b) Construire le centre Ω de f

   c) Montrer que ΩBD est rectangle et déduire que $\Omega \in (DE)$

2) la droite (ΩB) coupe la droite (DC) en H

   a) Que représente H pour le triangle BDE ?

   b) Déterminer $f\big((AD)\big)$ et $f\big((BD)\big)$ et déduire $f(D) = H$

   c) Montrer que $H = I * C$

II /1) Soit φ une similitude indirecte de centre ω de rapport $k \neq 1$, d'axe Δ

Soit $M \in P/\Delta$ et $M' = \varphi(M)$. La droite (MM') coupe Δ en G.

Montrer que G est le barycentre des points pondérés (M, k) et $(M', 1)$

Exercice 13 :

Dans le plan orienté, on considère un rectangle $ABCD$ tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $AB = 2AD$

On désigne par I et O les milieux respectifs de $[AB]$ et $[BD]$

Soit $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au rectangle $ABCD$. Soit f la similitude directe de centre C qui transforme B en I.

1) Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de la similitude de f

2) a) Montrer que $f(I) = D$

   b) Soit $A' = f(A)$, montrer que $D = A' * I$

3) La demi-droite $[CA')$ recoupe $\mathcal{C}$ en O'. Calculer CO' et CA' en fonction de CA. En déduire $O' = C * A'$ et $O' = f(O)$

4) Soit S la similitude indirecte telle que $S(B) = I$ et $S(I) = D$

   a) Vérifier que S est de rapport $\sqrt{2}$

b) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(D,1)$ et $(B,-2)$ puis construire Ω.

c) Soit $J \in [BI]$ tel que $\frac{JI}{JB} = \sqrt{2}$. On pose que $J' = S(J)$

Montrer que $\overrightarrow{J'D} = -\sqrt{2}\,\overrightarrow{J'I}$, en déduire que $(\Omega \mathrm{J})$ est l'axe de S

d) Montrer que $S\big((BC)\big) = (IC)$ et en déduire que $C' = S(C)$ est le symétrique de C par rapport à I.