M.BHIRI

Exercice 1 :

I/ Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct

On considère une isométrie f laissant globalement invariant le triangle ABC

1) Montrer que G le centre de gravité de ABC est invariant par f

2) Quelles sont les images possibles de A par f. En déduire les isométries laissant globalement invariantes le triangle ABC

II/ ABCD un carré direct

Déterminer les isométries laissant globalement invariant le carré ABCD

Exercice 2:

On note H l'orthocentre d'un triangle équilatéral direct ABC et B' le milieu de [AC]. On désigne par r_A, r_B et r_C les rotations de centres respectifs A, B et C et de même angle $\frac{\pi}{3}$.

On pose $f = r_A o r_B$, $g = r_C o r_B o r_A$ et $h = S_{(AC)} o S_{(AB)} o S_{(BC)}$

1) a) Déterminer f(C), f(B) et g (B)

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f et g.

2) Soit d la droite parallèle à (AC) passant par B

a) Montrer que $S_{(AB)} o S_{(BC)} = S_d o S_{(AB)}$

b) Déduire que h est une symétrie glissante.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et soit K = B*C

1) Soit f une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABC

a) Montrer que f(K) = K

b) Montrer que f(A) ≠ B et f(A) ≠ C

c) En déduire toutes les isométries qui laissent ABC globalement invariant

2)Soient A' et C' les points définis par $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BC}$ et g une isométrie qui envoie ABC en A'CC'

a)Montrer que $t_{\overrightarrow{CB}}$ o g est une isométrie qui laisse globalement invariant ABC.

b)En déduire toutes les isométries qui transforme ABC en A'CC'

3)On considère les points I = A*B et J = A*C et les applications

$R_1 = R_{(I, \frac{\pi}{2})}$, $R_2 = R_{(J, \frac{\pi}{2})}$, $f = R_2 o R_1$ et $g = R_2^{-1} o R_1$

a)Vérifier que AIKJ est un carré

b)Déterminer f(B) et g(B)

c) En déduire la nature et les caractéristiques de f et

4)En décomposant f et g en des symétries orthogonales convenablement choisies, caractériser les applications $f o S_{(BC)}$ et $S_{(AC)} o g$

Exercice 4 : vrai ou faux

1) ABC isocèle en C . Si f est une isométrie qui laisse invariant le triangle ABC alors $f = id_P$ ou $f = S_\Delta$ où Δ est la médiatrice de [AB]. F

2) La composée de deux déplacements d'angles opposés est une translation .

3) Si f est un antidéplacement alors fof est une translation .

Exercice 5

Soit l'application définie dans le plan complexe par

f(M(x + i y)) = M'(x' + i y') : $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}(x - y\sqrt{3}) + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{1}{2}(x\sqrt{3} + y) + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

a) Donner la forme complexe de f

b) Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c) Donner la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 6

On considère un triangle équilatéral direct IBC et $\mathscr{C}$ le cercle de centre I passant par B et H= B*C. [HI) coupe $\mathscr{C}$ en un point A et A' = $S_{(IC)}$(A)

1) Montrer que A'C = AB . En déduire qu'il existe un unique déplacement r que l'on caractérisera qui transforme B en C et A en A'.

2) (CI) recoupe $\mathscr{C}$ en D ,

On pose $f = S_{(AB)} o S_{(BD)}$ et I' = $S_{(BD)}$(I).

a) Montrer que (BD) // (HA) .

b) Donner f(B) , f(I') et la nature de f.

3) Soit A'' l'image de A' par la translation $t_{\overrightarrow{BC}}$.

a) Montrer que (A'B) // (AC) .

b) Montrer que A'' , A et C sont alignés .

c) Montrer que I'A' = AA'' .

4) Soient J= A * A' et K = I' * A'' .

a) Montrer que (JK) //(AI).

b) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement g qui envoie A' en A et I en A' .

c) Montrer que g(K) = J

d) Justifier que g n'admet pas de points invariants . caractériser alors g.

Exercice 7 (juin 2006 (C))

Soit AFED un carré direct de centre O et de coté 4

On désigne par B et O_1 les symétriques respectifs de A et O par rapport (EF).

1) a) Soit r la rotation qui envoie F en E et E en D . préciser l'angle et le centre de r .

b)Soit $f = r \circ S_{(OO_1)}$. Montrer que $f = S_{(OE)}$.

2) a) Soit $r' = t_{\overrightarrow{OO_1}} \circ r^{-1}$. Montrer que r' est une rotation dont on précisera l'angle .

b)Déterminer r'(O) . En déduire que F est le centre de r' .

3) On désigne par g l'antidéplacement qui envoie D en F et O en O_1 .

a) Montrer que g est une symétrie glissante que l'on caractérisera .

b) Soit M un point du plan .

Déterminer l'ensemble des points M vérifiant . g(M) = r'(M)

Exercice 8 : LPA 2017

Le plan est orienté dans le sens direct.

Soit ABC un triangle rectangle en A et tel que $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{8}[2\pi]$. (Voir figure ci dessous).

On donne $\tan(\frac{\pi}{8}) = \frac{1}{1+\sqrt{2}}$

On désigne par O le milieu du segment [BC] et par I le barycentre des points $(A,\sqrt{2})$ et $(B,1)$.

1) a) Montrer que AI = AC.

b) Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que f (C) = I et f (I) = B .

c) Prouver que f est une rotation, préciser son angle et construire son centre Ω .

d) Montrer que Ω appartient au cercle (Γ) circonscrit au triangle ABC et que $(\overrightarrow{B\Omega},\overrightarrow{BA}) \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$.

2) La droite (IC) recoupe le cercle (Γ) en F.

a) Montrer que : (AC) est parallèle à (ΩF).

b) Déterminer les images des droites (A Ω) et (AI) par f . En déduire que f(A) = F.

3) Soient Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 les médiatrices respectives des segments [F Ω], [F B] et [B A].

On note : $g = S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.

a) Montrer que g est une symétrie orthogonale.

b) Montrer que les droites (A Ω) et (B F) sont parallèles.

c) Déterminer g(Ω) puis caractériser g,

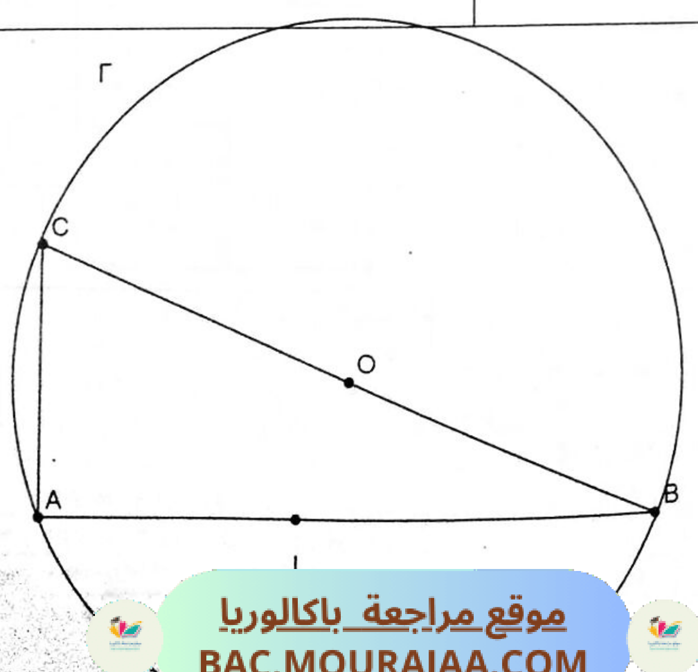
d) En déduire que $S_{\Delta_3} \circ S_{\Delta_2} = S_{\Delta_2} \circ S_{\Delta_1}$.

4) Soit $\psi = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{\Delta_3}$.

a) Montrer que ψ est une symétrie glissante.

b) Déterminer $\psi(B)$ puis construire O' = $\psi(O)$.

c) Donner la forme réduite de ψ.



Série
M.BHIRI

Exercice 0

Soit OAA' et OBB' deux triangles rectangles isocèles en O, de sens direct et I le milieu de [A'B]

Montrer que (OI) $\perp$ (AB') et que AB' = 2 OI.(On pourra utiliser la transformation roh où r = rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$ et h = homothétie de centre A' et de rapport 2.)

Exercice 1

Soit ABC un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle C . Les tangentes à C en A et B se coupent en E

Soit D le point diamétralement opposé à A sur C et I le milieu de [AC], soit F = S_I (E) et G = S_I (D)

On désigne par r_1 la rotation de centre E et d'angle $\pi/3$ et r_2 la rotation de centre D et d'angle $2\pi/3$

1) Montrer que AEBC est un losange et que $(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}) \equiv 2\pi/3\ [2\pi]$
2) Soit f = r_1 o r_2
   a) Déterminer f (C) puis caractériser f
   b) En déduire que le triangle EDG est équilatéral
3) Soit g = r_2 o S_I o r_1
   a) Déterminer g(B) puis caractériser g
   b) En déduire que r_2 (F) = E
4) Pour tout point M du plan distinct de E et F , on note M' = r_2 (M)
   a) Montrer que $(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{ME}) \equiv 2\pi/3 + (\overrightarrow{M'E}, \overrightarrow{ME})\ [2\pi]$
   b) En déduire l'ensemble des points M tels que E, M et M' sont alignés.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O , $\vec{u}, \vec{v}$)

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de chacune des transformations suivantes :

f: $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que

a) $z' = 2z + 1 - i$ b) $z' = z - i$ c) $z' = \bar{z} + 1 - i$
d) $z' = -iz + 1$ e) $z' = 2iz + 2 - 4i$ f) $z' = (1+i)z + 1 - i$ g) $z' = (1 - i\sqrt{3})\bar{z} + 1 - i$

Exercice 3

On désigne par A ,B ,C et D les points d'affixes respectives 2+ i, 1+2i , 6+3i et -1 +6i .

1) Caractériser le déplacement f qui transforme A en B et C en D .
2) Soit r la rotation de centre J(3 + [illegible]
3) mesure d'angle $\frac{-\pi}{2}$.Montrer que r (A)= D et r(C) = B
4) On désigne par M et N les milieux respectifs de [AC] et [BD] et I le point d'affixe 1 + i.
   IMJN est il un carré ?
5) La rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme I en P et La rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{2}$ transforme I en Q
   a) Déterminer les affixes de Pet Q .
   b) Comparer les rapports $\frac{IP}{IA}$ et $\frac{IQ}{IC}$
   c) En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe S_+ transformant A en P et C en Q.
   d) Donner l expression complexe de S_+.
   e) En déduire que S_+(M) = J et que J est le milieu de [PQ].

Exercice 3

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ACB de sens direct.On note Δ la perpendiculaire à (AB) menée de C . et I un point de Δ tel que $\left(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Soit s la similitude directe de centre A telle que s(C) = I et s' la similitude directe de centre B telle que s'(I) = C

1) Placer les points A , B , C et I sur une figure.
2) Prouver que sos' est une rotation que l'on caractérisera.
3) A tout point M du plan distincts de A , B et C, On associe les points N et P tels que :
   s : $M \mapsto N$ et s' : $P \mapsto M$

a) Déterminer une mesure de chacun des angles $\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BP}, \overrightarrow{BM}\right)$.

b)On note f la similitude directe de centre A telle que f(C) = M. En déduire l'image de I par f .puis déterminer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}\right)$

c)En déduire une construction de N et placer les points M et N sur la figure.

d)Montrer que IP = IN puis déterminer une mesure de $\left(\overrightarrow{IP}, \overrightarrow{IN}\right)$ Construire alors le point P.

M.BHIRI

Problème : isométrie – similitude $4^{ème}$ M

On considère dans un plan orienté, un triangle équilatéral de sens direct ABC et le cercle $\mathscr{C}$ de centre O circonscrit à ce triangle

On désigne par I , J et K les symétriques respectifs de O par rapport à (AB) , (AC) et (CB)

1) Quelle est la nature de IJK

2) Soit Γ l'arc [AB] de $\mathscr{C}$ passant par I et M un point de $\Gamma \setminus \{A, B\}$, on désigne par M' le point de [CM] tel que MM' = MA

a) Donner la nature du triangle AMM'

b) Déterminer les ensembles Γ' et Γ'' respectivement des points M' et M'', M'' étant le milieu de [MM']

3) Soit N le point de[BM) tel que BN = AM et r l'unique déplacement du plan qui envoie A sur B et M sur N

a. Montrer que r est une rotation, préciser l'angle et le centre

b. Montrer que le milieu de [M'N] est un point fixe Ω que l'on précisera

c. Prouver que si M est distinct de I alors M' n'appartient pas à (OI), quelle est la nature de M'INO

d. Soit B' = r(B) , montrer que I est le milieu de [OB'] et que (BB') est tangente à $\mathscr{C}$

4)On considère l'application $f = r_{(I,\ \pi/3)} \circ t_{\overrightarrow{BO}}$ et O' le symétrique de O par rapport à A

a) Déterminer la nature et le centre de f

b) Montrer que IJO' est équilatéral

5)Soit E un point du plan , On note $P = r_{(B,\ \pi/3)}(E)$ et $Q = r_{(C,\ \pi/3)}(E)$

a) Quelle est la nature de APQC dans le cas où P , A et C ne sont pas alignés

b) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement g qui envoie A en P et B en Q

c) Comparer g et $t_{\overrightarrow{AP}} \circ s_{(AO)}$.En déduire la forme réduite de g dans chacun des cas suivants :

- E appartient à (CK)
- E appartient à (AC)

6)Soit S la similitude directe qui envoie O sur B et B sur B'

a) Déterminer le rapport et l'angle de S

b) Déterminer la nature de SoS , en déduire le centre de S

c) Construire l'image d

Exercice 1 : vrai ou faux

1) L'image d'une droite par une similitude directe est une droite qui lui est parallèle.
2) Une similitude de rapport k multiplie les aires par k.
3) Soit S la similitude directe de centre $M_0(1-i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$

a) S a pour écriture complexe :

$$z' = (\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})z + 1 - i.$$

b) L'image par S de la droite D : $x+y = \sqrt{2}$ est la droite D' : $y = \sqrt{2}$.

Exercice 2

IAB étant un triangle rectangle direct en I tel que IA < IB et J le symétrique de I par rapport à B.

1) Soit f la similitude directe telle que :
f(A) = B et f(I) = J

a. Donner une mesure de l'angle de f

b. Montrer que f admet un seul point invariant O.

c. Construire O. Montrer que O = $S_{(AB)}$ (I)

2) Soit g la similitude indirecte telle que :
g(A) =B et g(I) = O

a. Montrer que f et g ont le même rapport

b. Caractériser alors $f^{-1}o\, g$.

c. Montrer que g(O) =J

d. En déduire que g transforme (OA) en (BI) et (BI) en (OA).

e. En déduire alors le centre et l'axe de g.

Exercice 3 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct(O , $\vec{u},\vec{v}$) (unité 5cm)
On désigne par a un nombre complexe et A , B et C les points d'affixes respectives a , i et – 1 .
On note g l'application : M(z) $\mapsto$ M'(z') avec

$$z' = \frac{a+z+iz}{3}$$

1) Soit M_1 l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, montrer que M' est l'isobarycentre des points A , M et M_1.

2) Montrer que :
g(B)= O si et seulement si a = 1 – i .

3) Soit a = 1 – i

a) Soit I le milieu de [BC] , montrer que O,A et I sont alignés.

b) Placer les points A , B , C et I sur une figure.

c) Prouver que g est une similitude directe dont on déterminera le centre Ω , le rapport et l'angle

d) Vérifier que A , B et Ω sont alignés.

4) a) Déterminer la mesure de l'angle $(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OI})$

b) En déduire l'image de (OB) par g est (OI)

c) Soit O' = g(O) , Montrer que I , O , O' et A sont alignés.

Exercice 4

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle C et tel que AB < AC.
On pose $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) \equiv \alpha[2\pi]$ et on désigne par r la rotation d'angle α et qui transforme B en C .

1) a) Montrer que le centre O de r appartient au cercle C

b) Justifier la construction de O.

c) Soit D = r(A).Montrer que D appartient à [CA)

2) Le but de cette question est de construire un point M de [BA)\{B} et un point N de [CA)\{C} tels que BM = CN et MN = BC.

On considère alors la similitude f directe de centre O telle que f(B)= M

a) Comparer for et rof

b) Montrer que r(M) = N .

c) En déduire que f(C) = N. puis que OM =OB.

d) Construire M et N.

Exercice 5

ABCD est un losange de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.On pose I = A*B , J = A*D et G le centre de gravité du triangle ABD.

1) Soit f la similitude directe telle que
f(D) = I et f(B)= A

a) Déterminer l'angle et le rapport de f .

b) On désigne par Ω le centre de f.
Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits respectivement aux triangles BID et ABG.

c) Construire Ω.

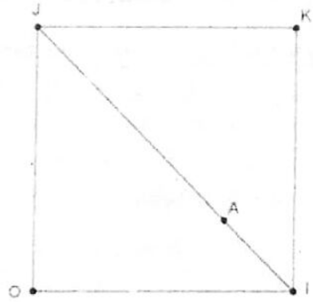
2) Soit σ la similitude indirecte telle que
σ(I) = D et σ(O) = C et h = σ o $S_{(AC)}$.

a) Déterminer h(O) et h(J).

b) Caractériser alors h et σ.

3) Caractériser l'application σof .

Exercice 5: (4,5 points) (LPA 2012)



Soit OIKJ un carré direct de coté 1 et A un point quelconque du segment [IJ] différent de I et J.
S désigne la similitude directe de centre O qui transforme I en A.
Les images de J, K et A par S sont respectivement notées J', K' et A'.

1) a) Montrer que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ'}) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ et que OA = OJ'

b) Construire J'.

2) a) Prouver que J', A et A' sont alignés.

b) Montrer que (OA') et (OI) sont symétriques par rapport à (OA)

c) Construire A'.

Dans toute la suite le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$. On note a l'affixe du point A et α un argument de a.

3) a) Prouver que $\arg(a-1) \equiv \frac{3\pi}{4}\,[2\pi]$.

b) Justifier la relation $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}) \equiv (\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KI})\,[2\pi]$

c) En déduire que $\arg[a-(1+i)] \equiv -\alpha - \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

4) a) Soit M d'affixe z et M' d'affixe z'. Prouver que S(M) = M' $\Leftrightarrow$ z' = a z.

b) Donner alors, en fonction de a, les affixes k' et a' des points K' et A'.

c) On note z_1 et z_2 les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{KK'}$ et $\overrightarrow{K'A'}$

Montrer que z_1 est un réel et que z_2 est un imaginaire pur.

5) Prouver que K' est le projeté orthogonal de A' sur (JK).

Exercice 2 : (5 points) (LPA 2013)

Dans le plan orienté, on considère un rectangle direct ABCD tel que AB = L et AD =1,(L > 1).
Sur les segments [AB] et [CD], on place respectivement les points F et E tels que AFED soit un carré.
On suppose qu'il existe une similitude f telle que :f (A) = B, f (B) = C, f (C) = E.

1) Montrer que $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

2) a/ Montrer que f est une similitude directe puis déterminer l'angle et le rapport de la similitude f . On appelle I le centre de la similitude f .

b/ Caractériser la transformation f o f.

c/ En déduire que I est le point d'intersection des droites (AC) et (BE).

3) a/ Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude f.

b/ En déduire une construction du point E', image du point E par la similitude f .

4) Le plan est rapporté au repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AD})$.
On appelle z l'affixe du point M, et z' l'affixe du point M', image du point M par f .

a/ Montrer que $z' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} iz + \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

b/ Déterminer l'image du point D par f .

5) Soit g la similitude indirecte telle que g(A) = B et g(C) = E

a/ Montrer que pour tout point M, les points f(M) et g(M) sont symétriques par rapport à la droite (BE).

b/ Déterminer alors les éléments caractéristiques de g.