Exercice n°1 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{x+3}}$.

1°) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en zéro.
Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

2°) a) Mq f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur lui-même.

b) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur $\mathbb{R}^+$ et calculer $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$.

3°) a) Mq $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique D d'équation $y = x - \frac{3}{2}$.

b) Soit $\varphi(x) = \frac{3x^2}{x+1}$. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ $0 \leq \varphi(x) \leq \frac{3}{2}$

c) Mq pour tout $x \geq 0$ $x - f(x) = \varphi\left(\sqrt{\frac{x}{x+3}}\right)$. En déduire la position de $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote oblique.

d) Construire $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}^{-1}$ dans le même repère.

4°) Soit la suite réelle définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $0 \leq U_n \leq 1$.

b) Mq la suite (U_n) est décroissante.

c) Mq pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ puis calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$

Exercice n°2 :

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x^2-1} + x$.

1°) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2°) Dresser le tableau de variation de f.

3°) a) Montrer que f réalise une bijection de $[1,+\infty[$ sur un intervalle J à préciser.

b) Calculer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

4°) On désigne par $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

a) Montrer que la droite d'équation $y = 2x$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$.

b) Construire les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$

5°) soit la fonction g définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=f(\frac{1}{\cos x})$

a) Mq pour tout $x\in[0,\frac{\pi}{2}[$ on a $g(x)=\frac{1+\sin x}{\cos x}$.

b) Mq g réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle K à préc.

c) Mq $\begin{cases} g(y)=x \\ y\in[0,\frac{\pi}{2}[\end{cases} \iff \begin{cases}\sin y = \frac{2x}{1+x^2} & x\in[1,+\infty[\end{cases}$

d) Mq g^{-1} est dérivable sur K et que pour tout $x\in K$

on a $(g^{-1})'(x)=\frac{2}{1+x^2}$

6°) on pose $G(x)=g^{-1}(x)+g^{-1}(\frac{1}{x})$ pour $x\in[1,+\infty[$.

Montrer que G est dérivable sur $[1,+\infty[$ et donner $G'(x)$

En déduire que $g^{-1}(\frac{1}{x})=-g^{-1}(x)$ pour tout $x\in[1,+\infty[$

6°) on pose $U_n=\frac{1}{n+1}\cdot\sum_{k=n}^{2n} g^{-1}(1+\frac{k}{n^2})$ $n\in\mathbb{N}^*$

a) Mq pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $g^{-1}(1+\frac{1}{n})\leq U_n\leq g^{-1}(1+\frac{2}{n})$

b) En déduire que (U_n) est convergente et donner sa limite

Exercice n°3 :

1°) soit $f: x\longmapsto\frac{1}{x^2}$ et $p\in\mathbb{N}^*$

Montrer que si $x\in[p,p+1]$ alors $-\frac{2}{p^3}\leq f'(x)\leq-\frac{2}{(p+1)^3}$.

2°) a) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis

Déduire $-\frac{2}{p^3}\leq\frac{1}{(p+1)^2}-\frac{1}{p^2}\leq-\frac{2}{(p+1)^3}$.

b) Déduire $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p^2}-\frac{1}{(p+1)^2}\right)\leq\frac{1}{p^3}\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p-1)^2}-\frac{1}{p^2}\right)$ $(p\geq 2)$

3°) soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^3}$.

a) Utiliser 2°) b) pour montrer que :

$$\frac{9}{8}-\frac{1}{2(n+1)^2}\leq U_n\leq\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}.$$

b) Mq la suite (U_n) converge vers une limite $\ell\in[\frac{9}{8},\frac{3}{2}]$