Lycée pilote Bourguiba de Tunis	**Série 6: Déplacements et Antidéplacements**	**4ème Math**
Mr :Barhoumi	**Mathématiques**	**2020/2021**

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $(\mathscr{C})$ de centre O tel que : ($\overrightarrow{\;}$;AB , $\overrightarrow{\;}$;AC) ≡ **Error!**$[2\pi]$et $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.La médiatrice de $[AC]$ coupe$(\mathscr{C})$en I et J(I appartient à l'arc $\left[AC\right]$).

1°) a) Montrer qu' il existe une rotation R qui envoie A en C et B en O .

b) préciser l'angle et le centre de R .

c) On pose R(C) = C' . Montrer que la droite (CC') est une tangente à $(\mathscr{C})$et que les trois points O, A et C' sont alignés .

2°) Soit l'application $f=R\circ S_{(AC)}\circ S_{(AB)}$.

a)Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .

b) Soit M le point du plan tel que $M\neq I$ et $M\neq J$. On pose $f(M)=M_1$ *et* $R(M)=M_2$.

Montrer que $\left(\overrightarrow{MM_1},\overrightarrow{MM_2}\right)\equiv\left(\overrightarrow{MJ},\overrightarrow{MI}\right)+\frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Que peut-on dire des points M, M_1 *et* M_2 lorsque$M\in(\mathscr{C})\setminus\{I,J\}$.

3°) On pose $R(J)=J'$ *et soit* $g=R\circ f^{-1}$.

Utiliser l'application g pour montrer que $C=J*J'$.

Exercice 2:

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que :

$\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.On note O le milieu de $[BC]$ et R la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.1°) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tels que $f(A)=O$ *et* $f(C)=B$.

b) En déduire que f est une rotation dont on précisera la mesure principale θ de son angle . Trouver une construction géométrique de son centre I .

c) Donner une mesure de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IB}\right)$. En déduire que I$\in[AB]$.

2°) On pose$\varphi=S_{(IC)}\circ S_{(BC)}\circ S_{(OI)}\circ S_{(IC)}$.

a) Montrer que $\varphi=R\circ f$.

b) préciser $\varphi(A)$ puis caractériser φ . En déduire que :$R^{-1}\circ S_{(AB)}=f\circ S_{(AC)}$.

3°)Soit g l'antidéplacement tel que $g(A)=O$ *et* $g(C)=B$.

a) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur .

b) Soit D le point tel que ABDC est un rectangle .Montrer que $g(O)=D$.

c)On pose $B'=g(B)$,montrer que : $B'=S_D(B)$.

Exercice 3 : Dans un le plan (P) orienté ; on considère un carré ABCD de centre I et tel que : $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par J et K les milieux respectifs de $[AD]$ et $[CD]$.
Soit E le point de (P) tel que le triangle DBE est équilatéral de sens direct .

1°) On pose $\psi=t_{\overrightarrow{BC}}\circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer $\psi(A)$ *et* $\psi(D)$.

b) En déduire que ψ est une symétrie glissante et déterminer ses éléments caractéristiques .

2°) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement R du plan qui transforme B en A et A en D . b) Caractériser R.

3°) Soit l'application $g = R_{\left(B,\frac{\pi}{6}\right)} \circ R_{\left(E,\frac{\pi}{3}\right)}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g.

4°) Soit f la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$ on pose $T = gof^{-1}$, déterminer le point $T(A)$ puis caractériser T.

5°) Soit M un point du plan, on pose :

$M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$

a) Quelle est la nature du quadrilatère ABM_2M_1 ?

b)Montrer qu'il existe un seul antidéplacement φ qui envoie A sur M_1 et D sur M_2 .

c) Comparer φ et $t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(AI)}$. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de φ dans chacun des cas suivants :

∗ M appartient à la droite (BD) .

∗∗ M appartient à la parallèle à (AC)passant par D.

6°) Soit (Δ) une droite variable passant par A et distincte (AC) . On désigne par B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de B et D sur (Δ).

a) Soit (Δ') la droite perpendiculaire à (Δ) passant par D . Déterminer les images par f des droites (Δ') et (Δ) ; en déduire l'image de D' par f

b) Montrer que le cercle de diamètre $[D'B']$ passe par un point fixe lorsque (Δ) varie .

Exercice 4 :

Dans le plan orienté on donne un rectangle $ABCD$ tel que $AB = 2\,BC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1)a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f du plan tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$

b)Caractériser f, puis montrer que $f(B) = D$

2)Déterminer la droite δ telle que $f = S_{IJ} \circ S_{\delta}$.

3) Soit r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer $r(B), r(C), r(J)$.

b) Soit M un point de $[CJ]$. La perpendiculaire à (IM) issue en I coupe la perpendiculaire à (BM) issue en J en M'. Quel est l'ensemble des points M'.

4) Soit $g = r \circ f$. a) Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b) Déterminer $g(A)$.

c) Déterminer la construction du centre de g .

5.)a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement h tel que $h(A) = C$ et $h(I) = J$.

b)Montrer que h est une symétrie glissante, puis montrer que $h(B) = D$.

c) Déterminer $(h \circ S_{AB})(A)$ et $(h \circ S_{AB})(B)$.

d) Montrer que $h = f \circ S_{AB}$, puis déduire les éléments caractéristiques de h .

Exercice 5 : Soit (E) :

$z^3 - \left(8 + i\sqrt{3}\right)z^2 + \left(19 + i4\sqrt{3}\right)z - 12 - 3i\sqrt{3} = 0$

1) a/ Montrer que l'équation (E) admet deux solutions réelles que l'on précisera.
b/ Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).
2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct R$\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives 1, 3 et (4 + $i\sqrt{3}$).
a/ Placer les points A, B et construire le point C dans le repère R. (Expliquer).
b/ Vérifier que le triangle ABC est isocèle.
c)/ Déterminer l'affixe du point D tel que ABCD est un losange. On notera I = A*B , J = B*C et L = D*C.
d/ Montrer que le triangle ABD est équilatéral direct.
3) Définir les déplacements qui envoient [AB] en [BC].
4) Soit $g=R_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)}\circ S_{(AC)}$ et K le centre du losange ABCD.
a/ Montrer que g est une symétrie glissante.
b/ Déterminer les images des points A et D par g. Déduire l'axe de g.
c/ Déterminer g (K) puis déduire la forme réduite de g.

Exercice 6:

ABCD est un losange tel que $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par :

I = A * B, J = D * C , K = A * D, G = B * J, Δ_1 est la médiatrice de [AB] et $\Delta_2=S_B\left(\Delta_1\right)$.

Partie I :
1) a) Faire une figure.
b) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(C) = B et f (B) = A.
c) Caractériser f.
2) Caractériser les isométries suivantes :
$g=f\circ S_{\Delta_1}$ et $h=f\circ t_{\overrightarrow{BC}}$.
3) Soit φ l'isométrie telle que $\varphi=h0g$.
a) Déterminer φ (A) et φ (K).
b) Déduire alors la nature et les éléments caractéristiques de φ.

Partie II :

Soit ψ l'antidéplacement tel que $\psi(J)=B$ et $\psi\left(\Delta_2\right)=\Delta_1$.
1) Montrer que ψ est une symétrie glissante.
2) a) Déterminer l'image de la droite (CD) par ψ. b) Déduire ψ (C).
3) a) Caractériser l'isométrie $S_G\circ\psi$.
b) Déduire alors la forme réduite de ψ.

Exercice 7:

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tels que AC= 2AB et $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.
I = A*C.
1)a) Montrer qu'il existe un unique déplacement φ qui transforme A en I et B en C.
b) Montrer que φ est une rotation dont on précisera l'angle. Construire son centre Ω.
2) Soient R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et $g=\varphi\circ R^{-1}$
a)Déterminer g (A) puis caractériser g.
b) En déduire que : $\varphi=t_{\overrightarrow{AI}}\circ R$
3) Soit E= R(I) et F le point tel que AEFI est un carré. a) Caractériser l'application $\varphi\circ\varphi$
b) Déterminer $\varphi\circ\varphi(A)$. En déduire que : $\Omega=A*F$.

Exercice 8:

Dans le plan orienté, on considère le losange ABCD de centre O et tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$. Le cercle de centre B et de rayon AB recoupe la droite (BD) en I.
1)a)Justifier l'existence d'un déplacement unique φ qui envoie A en C et B en D.
b)Caractériser φ .
2)a)Donner la nature de $g=r_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)}\circ t_{\overrightarrow{BD}}\circ r_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}$.
b)Déterminer g(D), caractériser alors g
3)Soit $f=r_{\left(B,-\frac{2\pi}{3}\right)}\circ r_{\left(A,\frac{\pi}{3}\right)}$
a)Donner la nature de f.
b)Caractériser f.
4)Déterminer et caractériser les isométries suivantes : $h=S_{(AI)}\circ S_{(BD)}\circ\varphi$ et $k=f\circ t_{\overrightarrow{CB}}$

Exercice 9:

Soit AFED un carré tel que $\left(\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit O son centre. On désigne par B et I les symétriques respectifs de A et O par rapport à la droite (EF).

1)Caractériser le déplacement r qui envoie F en E et E en D.

2)Soient $f=r\circ S_{(OI)}$ et $g=t_{\overrightarrow{OI}}\circ r^{-1}$.t

a)Donner la nature et les éléments caractéristiques de f

b)Montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

c)Déterminer g(O).En déduire le centre de g.

3)Soit h l'antidéplacement défini par h(D) = F et h(O) = I

a)Montrer que h est une symétrie glissante.

b)Donner la forme réduite de h.

4)Soit M un point de plan P.

a) Montrer que h(M) = g(M) $\Leftrightarrow$ f(M) = M

b)En déduire l'ensemble des points M tels que h(M)=g(M).

.

Exercice 10 :

ABC un triangle rectangle en A tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et O le milieu de [BC].

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie O en A et B en C.

b) Montrer que f est une rotation.

c) On note I le centre de f.

Donner une mesure de chacun des angles $\left(\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IO}\right)$ et $\left(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IA}\right)$.

d) En déduire que I appartient au segment [AB] et que I est le barycentre des points pondérés (A,2) et (B,1).

2) a) Soit $r=R_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}$. Caractériser f o r.

b) On note C' l'image de C par f. Montrer que O , I et C' sont alignés .

3) Soit g l'antidéplacement qui envoie O en A et B en C.

a) Déterminer les images des droites (OI) et (OA) par g.

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

Exercice 11:

Dans un plan orienté, on considère un triangle rectangle en B et tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.

On désigne par O le milieu de [AC] et par J =B*C

1)Montrer qu'il existe un unique déplacement R tel que R(A) = O et R(B)=C

2)a)Montrer que R est une rotation puis construire son centre D.

b)Donner la nature du quadrilatère ABOD

3)On désigne par $R_C=r_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}$, $R_B=r_{\left(B,\frac{\pi}{3}\right)}$ et $T=t_{\overrightarrow{BC}}$ On pose $f=R_C\circ T\circ R_B$

a)Déterminer f(B).

b)En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

4)On désigne par I le milieu de [OA] et par K le milieu de [AB], Soit φ l'antidéplacement qui transforme B en A et A en O.

a)Montrer que φ est une symétrie glissante puis déterminer ses éléments caractéristiques.

b)Montrer que φ (O)=D

c)Soit E = φ (D), montrer que E et B sont symétriques par rapport à O.

Exercice 12:

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$. Soient $D=r(C)$ et $E=r^{-1}(B)$, I = C * D

1)a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = D et f(C) = A

b)Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f.

2)Soit g = f o r

a)Montrer que g est une translation

b)Soit F=g(E), montrer que f(B) = F et en déduire la nature du triangle BIF.

c)Montrer que les points C, A et F sont alignés.

3)Soit $G=t_{\overrightarrow{AD}}(I)$

a)Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(C)=D$ et $\varphi(I)=G$.

b)Montrer que φ est une symétrie glissante dont on précisera le vecteur et l'axe.

Exercice 13:

Soit ABC un triangle équilatéral direct et H le milieu de [BC]. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon AB coupe la demi-droite [HA) en un point I. On note J le symétrique de I par rapport à (AC).

1)Montrer que $\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{CJ}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$

2)Montrer qu'il existe un seul déplacement f qui transforme B en C et I en J.

b)Montrer que f est une rotation que l'on caractérisera.

3)Caractériser $f\circ S_{(AI)}$.

4)La droite (AC) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en D. On pose $g=S_{(AI)}\circ S_{(BD)}$

a)Montrer que g est une translation dont on donnera le vecteur.

b)Caractériser l'isométrie f o g.

c)Soit K l'antécédent de J par f o g. Montrer que BCIK est un parallélogramme.

Exercice 14:

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD de centre O et tel que AB = 2 AD. Soient I, J et F les points définies par : I = A*B ; J = D * C et C = B * F

1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement S qui envoie A en C et I en J

b) Caractériser S

2) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$et $\mathscr{C}'$ le cercle de diamètre $[CD]$.

(BD) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ en M et recoupe le cercle $\mathscr{C}'$ en N ; on pose $M'=S_{(IJ)}(M)$.

a) Montrer que N = S (M)

b) Déduire que les droites (M'N) et (BC) sont parallèles.

3) a) Montrer qu'il existe une seule isométrie f vérifiant f(A) = C, f(I) = J et f(D) = F

b) Montrer que f est antidéplacement.

c) Déterminer f(B).

d) Déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

4) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g = f o S(AD).

Exercice 15 :

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O et E le symétrique de B par rapport à A. On pose I le milieu du segment [ED].

I/ 1) a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que f(A) = C et f(E) = D.

b) Caractériser f.

2) Soit g l'isométrie définie par ;

$g=R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}\circ S_{(BD)}$.

a) Montrer que g est une symétrie glissante.

b) Déterminer g(C) et g(D).

3) a) Montrer que pour tout M du plan les points g(M) et $f^{-1}(M)$ sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

b) Vérifier que $g\circ t_{\overrightarrow{AB}}=S_{(AE)}\circ t_{\overrightarrow{CB}}$.

c) Déduire alors la forme réduite de g.

d) Caractériser $g\circ S_{(BC)}$.

II/ Le plan P est rapporté au repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$.

Soit φ l'isométrie de P dans P qui à tout point M(x,y) associe le point M'(x',y') avec :

$$\begin{cases}x'=x-1\\y'=-y+1\end{cases}.$$

1) Montrer que φ est une symétrie glissante.

2) Démontrer que l'ensemble des points J milieux des segments [MM'] est une droite Δ.

3) Déterminer l'expression analytique de la symétrie orthogonale S par rapport à Δ.

4) a) Prouver que $\varphi=g$.

b) Déterminer alors l'expression analytique de l'isométrie t tel que φ = S o t.

Exercice 16:

Dans le plan orienté on a représenté un losange AOIB et un triangle ACB rectangle en A tel que : $\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$, O le milieu du segment et Δ la droite perpendiculaire à (BC) en C.

1) Soit f le déplacement tel que : $(B) = O$ et $((AC)) = \Delta$.

a) Montrer que f est une rotation.

b) Déterminer f((AB)).

c) Déduire que $(A) = C$.

2) a) Vérifier que le triangle IAC est équilatéral.

b) Caractériser alors f.

3) Soit E le point tel que OICE est un parallélogramme et $D=f(C)$. On désigne par r la rotation de centre D et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et on pose $t = f \circ r$.

a) Déterminer t(C) puis caractériser t .

b) Déterminer r (E) . En déduire que EBD est un triangle équilatéral.

4) Soit F le milieu du segment $[AB]$ et g l'isométrie définie par $g=S_O\circ S_{(AC)}$.

a) Déterminer la droite Δ' telle que $S_O=S_{(OI)}\circ S_{\Delta}$.

b) Caractériser alors g .

<u>Exercice 17:</u>

Soit AIB un triangle équilatéral tel que $\left(\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IB}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ et C le symétrique de A par rapport à (BI).

1) a) Montrer qu'il existe un seul déplacement f tel que f(A)=B et f(B)=C. b) Identifier f.

2) Soit (Γ) le cercle de centre B et passant par I. Soit M un point de ce cercle et M' son image par la rotation R de centre I et d'angle . $-\frac{\pi}{3}$.

a) Montrer que si M décrit (Γ) le point M' décrit un cercle (Γ ') qu'on précisera et qu'on construira.

b) Soit Ω le point d'intersection de (Γ) et (Γ').Montrer que si $M\in\Gamma\setminus\{I\}$ alors Ω, M et M' sont alignés.

3) Soit g l'antidéplacement définie par g(A)=B et g(B)=C.

a) Montrer que g est une symétrie glissante qu'on caractérisera.

b) Vérifier que $g=S_{(BC)}\circ R$ et déduire l'ensemble des points N du plan tels que g(N)=R(N).