Lycée pilote de Tunis	Isométries planes 1	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de Corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

Soit ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\theta\left[2\pi\right]$ et $\theta\in\left]0,\pi\right[\setminus\left\{\frac{\pi}{3}\right\}$. Soit $D=S_{(AC)}(B)$ et A' le milieu de $[BC]$.

1. Soit f une isométrie qui transforme $\{A,B,C\}$ en $\{A,C,D\}$.

   a) Montrer que f fixe le point A.

   b) En déduire que f est soit une rotation r ou une symétrie orthogonale s que l'on précisera.

2. On pose $g=s\circ r$. Déterminer les images par g des points A, B, C et A'. Caractériser alors g.

Exercice2

Soit ABC un triangle rectangle en A et isocèle tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\left[2\pi\right]$. Soit I le milieu de $[BC]$.

1. Soit f une isométrie telle que $f\left(\{B,C\}\right)=\{B,C\}$.Montrer que f fixe I. En déduire les isométries f qui vérifient $f\left(\{B,C\}\right)=\{B,C\}$. Quelles sont celles qui laissent ABC globalement invariant ?

2. Soit $D=S_{(BC)}(A)$ et g une isométrie qui transforme $\{A,B,D\}$ en $\{A,C,D\}$.

   a)Montrer que $g\left(B\right)=C$ et que g laisse I invariant.

   b) Déterminer les isométries g.

3. a)Soit Δ la médiatrice de $[BD]$ .Caractériser l'isométrie $r=S_{(AD)}\circ S_{\Delta}$.

   b) Soient M et N les points tels que $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$. Montrer que $r\left(M\right)=N$. En déduire que la médiatrice de $\left[MN\right]$ passe par un point fixe.

4. a) Montrer que $S_{\Delta}\circ S_{(AB)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

   b) En déduire la forme réduite de l'isométrie $\varphi=r\circ S_{(AB)}$.

5. Caractériser l'isométrie $r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}\circ S_{(AB)}$.

Exercice3

Soit ABC un triangle équilatéral direct et (C) le cercle circonscrit à ce triangle. La médiatrice de $[BC]$ coupe (C) en A et D. On note A' le point d'intersection des droites (BD) et (AC).

1. Montrer que $A'=S_C(A)$.

2. Soit $f=S_{(BD)}\circ S_{(DC)}$ et $g=S_{(CA)}\circ S_{(AB)}$. Caractériser les applications f, g et $f\circ g$.

3. Soit $E=S_{(AC)}(B)$. On pose $h=S_{(CA)}\circ S_{(AB)}\circ S_{(BD)}$.

   a) Déterminer $h(B)$.

b) Montrer que h est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.

Exercice4

Dans le plan orienté, on considère un losange $ABCD$ de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]$.On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.

1. a) Identifier les isométries $R=S_{(DC)}\circ S_{(DJ)}$ et $T=S_{(OJ)}\circ S_{(DC)}$.

   b) Montrer que l'isométrie $f=T\circ R$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2. Soit M un point du segment $[AB]$ et N un point du segment $[BC]$ tel que $AM=BN$ et Q le point tel que $IDNQ$ est un parallélogramme.

   a) Préciser $R(M)$, en déduire que $f(M)=Q$.

   b) Donner la nature du triangle JMQ.

3. Soit g l'isométrie du plan tel que $g(A)=D$, $g(B)=C$ et $g(D)=B$.

   a) montrer que g est un antidéplacement.

   b) Montrer que $g(O)=J$ et $g(K)=O$ puis identifier $t_{\overrightarrow{JO}}\circ g$.

   c) En déduire que g est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4. On note $h=R^{-1}\circ g$ et $\varphi=S_{(AD)}R^{-1}\circ g$. Déterminer $h(B)$ et $h(K)$ puis identifier $h\circ g$.

Exercice5

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$.On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et Δ la droite perpendiculaire à (BD) passant par le point D.

1. Soit $f=S_{(BD)}\circ S_{(OI)}\circ t_{\overrightarrow{AB}}$.

   a) Caractériser l'application $S_{(OI)}\circ S_{(AD)}$;

   b) E déduire que f est une rotation dont on précisera le centre et une mesure de son angle.

2. Soient R la rotation de centre D et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$ et $g=R\circ S_{(DC)}$.

   Caractériser $S_{(BD)}\circ S_{\Delta}$ et en déduire que g est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

3. a) Soit l'isométrie $h=t_{2\overrightarrow{BA}}\circ S_{\Delta}$, caractériser $h\circ S_{(AC)}$.

   b) En déduire que h est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

4. Soit φ une isométrie qui laisse globalement invariant le triangle ABD.

   a) Montrer que φ ([BD])= [BD].

   b) En déduire que φ fixe aux moins deux points que l'on précisera.

   c) Déterminer alors toutes les isométries qui laisse globalement invariant le triangle ABD.

Lycée pilote de Tunis	**Isométries planes 1**	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	**Eléments de Corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. a) *Si* $f(A)=C$

- On aura $f(B)=A$ et $f(C)=D$ donc $AC = CD$ impossible.
- Ou bien $f(B)=D$ et $f(C)=A$ donc $AB = CD$ impossible.

Si $f(A)=D$ aussi impossible.

Autrement :

f isométrie $\Rightarrow f([BC])$ est un segment qui lui est isométrique. Or $BC = CD$ et $BC \neq AC = AD$

donc $f([BC])=[CD]$. Ainsi $f(A)=A$.

b) Soit $f(A)=A$; $f(B)=C$ *et* $f(C)=D$ donc $f=r_{(A,\theta)}$.

ou bien $f(A)=A$, $f(B)=O$ et $f(C)=D$ donc $f= S_{(AC)}$ car $f \neq idp$ et f fixe A et C.

2. $g = g = S \circ r$; g est la composée de 2 isométries donc g est une isométrie $g(A) = A$, $g(B) = C$, $g(C) = B$ et $g(A')=A'$. g est une isométrie $\neq$ idp et qui fixe A et A' donc $g = S_{(AA')}$

Exercice2

1. I étant milieu de $[BC]$ donc $f(I)$ est le milieu du segment $[f(B)f(C)]=[BC]$.*Ainsi* $f(I)=I$ et par suite f fixe I.

- $f(B)=B$ et $f(C)=C$ donc $f=idp$ ou $f=S_{(BC)}$
- $f(B)=C$ *et* $f(C)=B$ donc $f \neq idp$ *et* f fixe $I \Rightarrow f=S_I$ ou $f=S_{(AI)}$

Les isométries qui laissent ABC globalement invariant sont $S_{(AI)}$; idp.

2. a) ABD rectangle isocèle en B et ACD rectangle isocèle en C

$g(ABD)=(ACD) \Rightarrow g(B)=C$

$g(B)=C \Rightarrow g(\{A,D\})=\{A,D\} \Rightarrow g(I)=I$.

b) deux cas :

- $g(A)=A$, $g(B)=C$ *et* $g(D)=D$ donc $g(I)=I$ et par suite $g=S_{(AD)}$
- $g(A)=D$, $g(B)=C$, $g(D)=A$ et $g \neq idp \Rightarrow g(I)=I$ et $g=S_I$

3. a) $R=S_{(AD)} \circ S_{\Delta}=S_{(ID)} \circ S_{(IJ)}$.

or $(ID)\cap(IJ)=\{I\}$ et $(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{ID}) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi]$ donc $2(\overrightarrow{IJ},\overrightarrow{ID}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow r=R_{\left(I,\frac{\pi}{2}\right)}$

b) on a : $r(A)=B$, $r(B)=D$

On $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ donc si $M'=R(M)$, on aura $\overrightarrow{BM'}=\frac{1}{4}\overrightarrow{BD} \Rightarrow M'=N$

$r(M)=N$ donc $IM = IN$ et donc I est un point de la médiatrice de $[MN]$ et I est fixe.

4. a) Δ et (AB) sont parallèles donc $S_\Delta \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{AC}}$

b) $\varphi = r \circ S_{(AB)} = \left(S_{(AD)} \circ S_\Delta\right) \circ S_{(AB)} = S_{(AD)} \circ \left(S_\Delta \circ S_{(AB)}\right) = S_{(AD)} \circ t_{\overrightarrow{AC}} =$

$= S_{(AD)} \circ t_{\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IC}} = S_{(AD)} \circ t_{\overrightarrow{IC}} \circ t_{\overrightarrow{AI}} = S_{(AD)} \circ \left(S_{(AD)} \circ S_{\Delta_1}\right) \circ t_{\overrightarrow{AI}}$ avec Δ_1 est la médiatrice du segment $[IB]$

Soit finalement $\varphi = S_{\Delta_1} \circ t_{\overrightarrow{AI}}$ avec $\overrightarrow{AI}$ directeur de Δ_1 donc : $\varphi = S_{\Delta_1} \circ t_{\overrightarrow{AI}} = t_{\overrightarrow{AI}} \circ S_{\Delta_1}$ forme réduite de φ.

5. $h = r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AB)}$

h est la composée de 2 isométries donc c'est une isométrie qui fixe A et D ; $h(D) = D$ (a justifier) et $h \neq idp$ donc $h = S_{(AD)}$

Ou bien : $\varphi = r\left(A, \frac{\pi}{2}\right) \circ S_{(AB)} = \left(S_{(AD)} \circ S_{(AB)}\right) \circ S_{(AB)} = S_{(AD)}$.

Exercice3

1. On a $DB = DC \Rightarrow BDC$ isocèle en D.

$\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)[2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Donc $\left(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ **(1)**

Ainsi $A'BA = \frac{\pi}{2}$ et par suite $AA'B = \frac{\pi}{6}$ **(2)**

(1) et **(2)** $\Rightarrow$ $A'CB$ est isocèle en C donc $CA' = CB$ or $CB = CA \Rightarrow CA' = CA$.

De plus $\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CA'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) + \left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA'}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$. Donc C est le milieu du segment $[AA']$ ou encore $A' = S_C(A)$

2. $f = S_{(BD)} \circ S_{(DC)}$

$(BD) \cap (DC) = \{D\}$ et $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}\right) = \frac{2\pi}{3}[2\pi]$. Donc $f = R_{\left(D,-\frac{2\pi}{3}\right)}$

$g = S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = R_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)}$

$f \circ g = r_{\left(D,-\frac{2\pi}{3}\right)} \circ r_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)} = \left(S_{(DC)} \circ S_{(DA)}\right) \circ \left(S_{(AD)} \circ S_{\Delta'}\right) = S_{(DC)} \circ S_{\Delta'}$, Δ' parallèle à (DC) passant par A

Donc $f \circ g = t_{\overrightarrow{AC}}$ car $(AC) \perp (DC)$ et $(AC) \perp \Delta'$

3. $h(B) = E$. h est la composée des trois isométries donc h est une isométrie.

$(AB) \perp (BD) \Rightarrow S_{(AB)} \circ S_{(BD)} = S_B$. Donc $h = S_{(cA)} \circ S_B$.

Soit Δ_2 la parallèle à (AC) passant par B. On a $S_B = S_{\Delta_2} \circ S_{(BE)}$.

$h = S_{(CA)} \circ S_{\Delta_2} \circ S_{(BE)} = t_{\overrightarrow{EB}} \circ S_{(BE)} = S_{(BE)} \circ t_{\overrightarrow{EB}}$

Exercice4

1. a) $R = S_{(DC)} \circ S_{(DJ)} = R_{\left(D,2\left(\overrightarrow{DJ},\overrightarrow{DC}\right)\right)} = R_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)}$; $T = S_{(OJ)} \circ S_{(DC)} = t_{2\overrightarrow{O'O}}$ avec O' le projeté orthogonal de O sur (DC).

b) $f = S_{(OJ)} \circ S_{(DJ)} = R_{\left(J,\frac{\pi}{3}\right)}$.

2. a) Soit $M' = R(M)$. $R\langle[AB]\rangle = [BC]$. Donc $R(M)$ est l'unique point de $[BC]$ tel que $BM' = AM$ d

$M' = N$ et $R(M) = N$.

On a $2\overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{DI}$ et $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{NQ}$ ($IDNQ$ parallélogramme) donc $t_{\overrightarrow{2O'O}}(N) = t_{\overrightarrow{NQ}}(N) = Q$.

Ainsi $f(M) = T \circ R(M) = T(N) = Q$

b) $f(M) = Q \Rightarrow JMQ$ est équilatéral direct.

3. a) $g\left(\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}\right)\right) = \left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right)$ or $\left(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CB}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ donc g est une isométrie qui échange les mesures des angles orientés en leurs opposés donc g est un antidéplacement.

b) O étant milieu de $[BD]$ donc $g(O)$ est le milieu du segment $[g(D)g(B)]$ qui est le point J.

de même $g(K) = O$.

$t_{\overrightarrow{JO}} \circ g(O) = O$ et $t_{\overrightarrow{JO}} \circ g(K) = K$.

$t_{\overrightarrow{JO}} \circ g$ est un antidéplacement qui fixe deux points distincts donc $t_{\overrightarrow{JO}} \circ g = S_{(OK)}$.

c) On a $t_{\overrightarrow{JO}} \circ g = S_{(OK)} \Rightarrow g = t_{\overrightarrow{OJ}} \circ S_{(OK)}$ et on montre que O ; J et k sont alignés donc g est une symétrie glissante d'axe (OK) et de vecteur $\overrightarrow{OJ}$.

Exercice5

1. $f = S_{(BD)} \circ S_{(OI)} \circ t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(OB)} \circ S_{(OI)} \circ t_{\overrightarrow{AB}}$. f est la composée de 3 isométries donc f est une isométrie.

a) $t_{\overrightarrow{AB}} = S_{(DI)} \circ S_{(AD)}$

b) $f = S_{(BD)} \circ S_{(OI)} \circ \left(S_{(OI)} \circ S_{(AD)}\right) = S_{(BD)} \circ S_{(AD)} = r_{\left(D, 2\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}\right)\right)} = r_{\left(D, \frac{\pi}{2}\right)}$

2. $g = R \circ S_{(DC)}$ et soit $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ.

$(BD) \cap \Delta = \{D\}$ donc $S_{(BD)} \circ S_{\Delta} = R_{\left(D, 2\left(\vec{u}, \overrightarrow{DB}\right)\right)} = R_{(D,\pi)} = S_D$.

$g = R_{\left(D, \frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(DC)} = S_{(BD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(DC)} = S_{(BD)} \circ S_D = S_{(BD)} \circ S_{(BD)} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta}$

3. *a)* $h = t_{\overrightarrow{2AB}} \circ S_{\Delta}$

$h \circ S_{(AC)} = t_{\overrightarrow{2AB}} \circ S_{\Delta} \circ S_{(AC)}$

$\Delta // (AC) \Rightarrow S_{\Delta} \circ S_{(AC)} = t_{\overrightarrow{BD}}$. Donc : $h \circ S_{(AC)} = t_{\overrightarrow{2AB}} \circ t_{\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{2AB}+\overrightarrow{BD}} = t_{\overrightarrow{AC}}$

b) $h \circ S_{(AC)} = t_{\overrightarrow{AC}}$ $h \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)}$

$h = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AC)} = S_{(AC)} \circ t_{\overrightarrow{AC}}$ forme réduite de h.

4. φ conserve la distance

$\varphi([BD]) \neq [AB]$ car $AB \neq BD$, $\varphi([BD]) \neq [AD]$ car $AD \neq BD$

Donc $\varphi([BD]) = [BD]$

$O = B*D \Rightarrow \varphi(O) = \varphi(B)*\varphi(D) = O \Rightarrow \varphi$ fixe O

$\varphi([BD]) = [BD] \Rightarrow \varphi(A) = A$

φ isométrie qui fixe les deux points distincts O et A donc $\varphi = idp$ ou $\varphi = S_{(OA)}$.