Isométrie

L'essentiel

Définition On appelle isométrie toute application du plan P dans lui-même qui conserve les distances.

La composée de deux isométries est une isométrie

La réciproque d'une isométrie est une isométrie

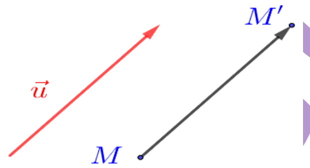
Isométries usuelles

Identité du plan

L'application du plan dans lui-même qui n'a tout point M associe M lui-même s'appelle l'identité du plan et se note Id_P

Translation

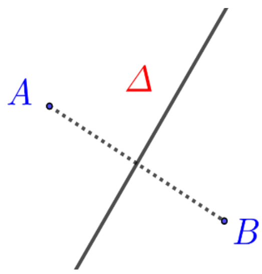
Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan $t_{\vec{u}}(M) = M' \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{MM'}$



$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$	$t_{\vec{0}} = Idp$	$\begin{cases} t_{\vec{u}}(M) = M' \\ t_{\vec{u}}(N) = N' \end{cases}$ Alors $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'}$	$t_{\vec{0}} = Idp$

Propriété caractéristique

Soit f une application du plan dans lui-même alors f est une translation si et seulement si pour touts points A et B d'images respectives A' et B' on a $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$



Symétrie orthogonale

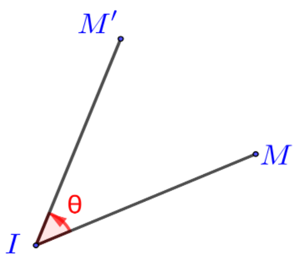
Soit Δ une droite du plan $S_\Delta(M) = M' \Leftrightarrow$
$\begin{cases} M' = M \text{ si } M \in \Delta. \\ \Delta \text{ est la mediatrice de } [MM'] \text{ Si } M \notin \Delta \end{cases}$

$S_\Delta \circ S_\Delta = Idp$	$S_\Delta^{-1} = S_\Delta$

Rotation

Soit I un point du plan et θ un réel

$R_{(I,\theta)}(I) = I$ *et si* $\neq I$ $R_{(I,\theta)}(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} IM = IM' \\ \left(\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$



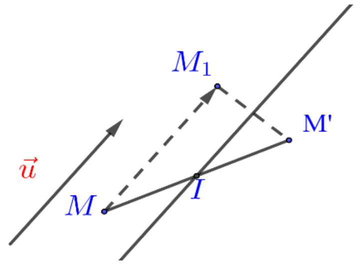
$R_{(I,0)} = Idp$	$R_{(I,\pi)} = S_I$	$\begin{cases} R_{(I,\theta)}(A) = B \\ R_{(I,\theta)}(c) = D \end{cases}$ *alors* $\begin{cases} BD = AC \\ \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \theta[2\pi] \end{cases}$

Symétrie glissante

Soit Δ une droite du plan et $\vec{u}$ un vecteur directeur de Δ

Alors la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$

Est l'isométrie $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$



$f \circ f = t_{2\vec{u}}$.	$(M) = M'$ alors le milieu de $[MM']$ est un point de Δ	$\begin{cases} A \in \Delta. \\ f(A) = B \end{cases}$ alors $\begin{cases} \vec{u} = \vec{AB} \\ D = (AB) \end{cases}$

Remarques

Si $\vec{u}$ n'est pas directeur de Δ alors $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta \neq S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$

Et $t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ n'est pas nécessairement une symétrie glissante (on va l'étudier ultérieurement)

Théorème1 une isométrie du plan est l'identité du plan ou une symétrie orthogonale ou une rotation ou une translation ou une symétrie glissante

Théorème2 : Soit f une isométrie du plan alors

- L'image d'un segment $[AB]$ est le segment $[f(A)f(B)]$
- L'image d'une droite (AB) est la droite $\big(f(A)f(B)\big)$
- L'image d'un cercle $\mathcal{C}_{(I,R)}$ est le cercle $\mathcal{C}'_{(f(I),R)}$
- Une isométrie conserve les milieux, les barycentres, l'orthogonalité, le parallélisme ,l'alignement et les mesure des angles géométrique (non orienté)

Isométries et points fixes

Isométrie	Ensemble des points invariants
$\boldsymbol{Id_p}$	$\boldsymbol{P}$
$\boldsymbol{S_\Delta}$	$\boldsymbol{\Delta}$
$\boldsymbol{R_{(I,\theta)}}$. $\boldsymbol{\theta \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}}$	$\boldsymbol{\{I\}}$
$\boldsymbol{t_{\vec{u}}}$ $\boldsymbol{\vec{u} \neq \vec{0}}$	$\emptyset$
Symétrie glissante	$\emptyset$

Théorème3

Une isométrie qui fixe trois points non alignés est l'identité du plan

Une isométrie qui fixe deux points A et B est

- Soit une identité dans le plan
- Soit une symétrie orthogonale d'axe la droite (AB).

Une isométrie qui fixe A est :

- Soit l'identité dans le plan
- Soit une symétrie orthogonale d'axe passant par A.
- Soit une rotation de centre A

Une isométrie sans points fixes est :

- Soit une translation
- Soit une symétrie glissante

Conséquences

- Deux isométries qui coïncident Suivant trois points non alignes sont égaux
- Si ABC et A'B'C' sont deux triangles isométriques Alors il existe une unique isométrie f tel que $f(A) = A', f(B) = B'$ et $f(C) = C'$

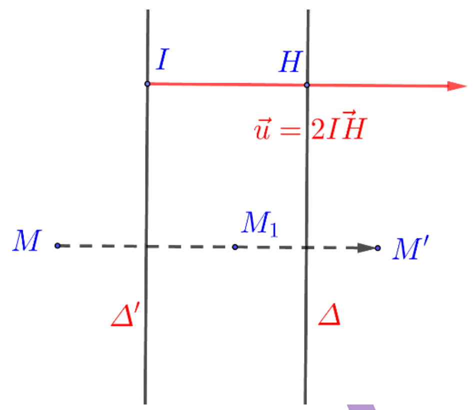
Composition

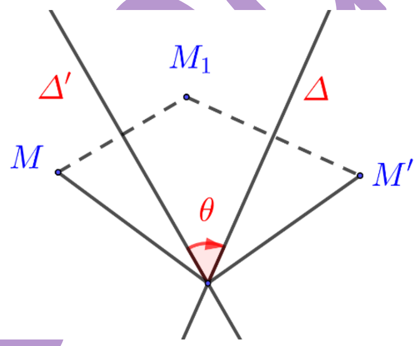
Théorème4

Soit f et g deux isométries

- En général $f \circ g \neq g \circ f$ Lorsque $fog = g \circ f$ on dit que f et g commutent
- Si $f \circ g = h$ alors $f = g \circ h^{-1}$ et $g = f^{-1} \circ h$
- $f \circ g = Id_p \Leftrightarrow f = g^{-1}$
- $(fog)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$

Composé de deux symétries orthogonales





Théorème5

Soit Δ et Δ' deux droites du plan de vecteurs directeurs respectives $\vec{u}$ et $\vec{v}$

- Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_D \circ S_{\Delta}' = t_{2\vec{IH}}$ où I est un point de Δ' et H sont projetée orthogonal sur Δ
- Si $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$ alors $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'} = R_{\left(I, 2\left(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}\right)\right)}$

Décompositions des isométries

Théorème6

- Toute translation est la composée de deux symétries orthogonales dont les axes sont parallèles
- Toute rotation de centre I est la composée de deux symétries orthogonales dont les axes sont sécants en I

Théorème7

- La décomposition d'une rotation ou d'une translation n'est pas unique
- Pour décomposer une rotation Rde centre I et d'angle θ on choisit une droite Δ qui passe par I dans ce cas $R = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ S_{\Delta_2}$ avec $\Delta_1 = R_{\left(I, \frac{\theta}{2}\right)}(\Delta)$ et $\Delta_2 = R_{\left(I, -\frac{\theta}{2}\right)}(\Delta)$

- Pour décomposer une translation Tde vecteur $\vec{u}$ on choisit arbitrairement une droite Δ de vecteur normal $\vec{u}$ dans ce cas $T = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ S_{\Delta_2}$ avec $\Delta_1 = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$ et $\Delta_2 = t_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$
- Soit Δ et Δ' deux droites perpendiculaires en I alors $S_{\Delta} \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = S_I$

Isométrie	Décomposition	Nombre d'axe
Identité du plan	$S_{\Delta} \circ S_{\Delta}$	2
Symétrie orthogonale	S_{Δ}	1
Rotation de centre I	$S_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$, $\Delta \cap \Delta' = \{I\}$	2
Translation	$S_{\Delta} \circ s_{\Delta'}$, $\Delta // \Delta'$	2
Symétrie glissante	$S_{\Delta} \circ s_{\Delta'} \circ S_{\Delta''}$, $\Delta // \Delta'$ et $\Delta \perp \Delta''$	3

Une isométrie est au plus la composée de trois symétries orthogonales

Comprendre

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct$\left(0, \vec{u} \cdot \vec{v}\right)$. On considère les applications

$f: \begin{smallmatrix} P \to P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{smallmatrix}$ Tel que : $z' = i\bar{z} + 2$ et $g: \begin{smallmatrix} P \to P \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{smallmatrix}$ Tel que : $z' = i\bar{z} + 1 - i$

1) a. Montrer que f est une isométrie
   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f
2) a. Montrer que g est une isométrie
   b. Déterminer l'ensemble des points invariants par g . Caractériser alors g
3) Montrer que fog et une translation puis caractériser f

Exercice 2

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct$\left(0, \vec{u} \cdot \vec{v}\right)$

Soit f l'application du plan dans lui-même qui a tout point $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$

Tel que $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

1) Montrer que f est une isométrie

2) Déterminer l'ensemble des points fixes de f

3) Caractériser alors f

S'entrainer

Exercice 3

Dans le plan orienté dans le sens direct on donne un carré ABCD de centre O tel que, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par E le symétrique de B par rapport à C.

1) a. Prouver que le triangle BDE est rectangle isocèle.

   b. Caractériser l'application $S_{(DE)}oS_{(AC)}$

   c. Montrer que $t_{\overrightarrow{BD}}oR_{(C,-\frac{\pi}{2})}$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

2) . a. Caractériser l'application $S_{(BD)}\, oS_{(DA)}$.

   b. Montrer que $S_O\, oR_{(D,\frac{\pi}{2})}$ est une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

3). Montrer que l'application $f = S_{(DE)}\, oS_{(DB)}\, oS_{(AB)}\, oS_{(AD)}$ est une translation

Exercice 4:

Dans le plan orienté dans le sens direct on donne un losange ABCD tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments [AB], [BC] et [AD].

1. a. Caractériser l'application $S_{(BA)}oS_{(BD)}$.

b. Montrer que $R_{(B,\frac{2\pi}{3})}\, oR_{(D,\frac{-2\pi}{3})}$ est une translation dont on précisera le vecteur.

2. La droite (BK) coupe la droite (DC) en E.

a. Caractériser l'application) $S_{(EB)}oS_{(ED)}$.

b. Caractériser l'application $R_{(E,-\frac{\pi}{3})}\, oR_{(C,\frac{-2\pi}{3})}$

3. a. Caractériser l'application. $S_{(DJ)}oS_{(BE)}$

b. Caractériser l'application $t_{\overrightarrow{BC}}oR_{(E,-\frac{\pi}{3})}$

S'approfondir

Exercice 5:

Le plan orienté dans le sens direct .Soit ABCD un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

1). Soit E l'ensemble des isométries qui laisse globalement invariant le triangle ABD.

   a. Montrer que si $f \in E$ alors $f(O) = O$ et que $f(A) = A$.

   b. Déterminer alors E

2). Soit F l'ensemble des isométries qui qui envoie le triangle ABD au triangle BCD.

   a. Montrer que si $g \in F$ alors $gos_o \in E$

   b. Déterminer alors F

3) Soit G l'ensemble des isométries qui laisse globalement invariant le carré ABCD.

   a. Montrer que si $f \in G$ alors $f(O) = O$

   b. Déterminer alors G

Exercice 6:

Soit ABC un triangle équilatéral direct et $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC. La médiatrice de $[BC]$ recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en D et la droite (BD) coupe (AC) en E.

1). a. Montrer que le triangle BCE est isocèle en C.

b. Montrer que (DC) est la médiatrice de [AE].

2. a. Caractériser les isométries $f = S_{(BD)}oS_{(DC)}$ et $g = S_{(AC)}oS_{(AB)}$
   b. Déterminer les droites Δ et Δ'telles que $f = S_{\Delta}oS_{(AD)}$ et $g = S_{(AD)}oS_{\Delta'}$

   c. Caractériser fog

Exercice 7

Le plan est orienté dans le sens direct. Soit ABCD un carré de centre O et tel que

$(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par I et J les milieux respectives de $[\mathrm{AD}]$ et $[\mathrm{AB}]$

1)a) Caractériser les isométries : $\mathrm{S}_{(\mathrm{AD})} \circ \mathrm{S}_{(\mathrm{AC})}$ et $\mathrm{S}_{(\mathrm{AC})} \circ \mathrm{S}_{(\mathrm{CB})}$

b) Montrer alors que $\mathrm{R}_{\left(\mathrm{A},\frac{\pi}{2}\right)}\mathrm{o}\mathrm{R}_{\left(\mathrm{c},\frac{-\pi}{2}\right)}$ est une translation

2) Soit $\mathrm{g} = \mathrm{R}_{\left(\mathrm{A},\frac{\pi}{2}\right)} \circ \mathrm{S}_{(\mathrm{BD})}$

a)Montrer que $\mathrm{g} = \mathrm{S}_{(\mathrm{AD})} \circ \mathrm{S}_{\mathrm{O}}$

b) Montrer que g est une symétrie glissante dont on précise l'axe et le vecteur

3) Soit $f = t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)}$ et $h = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AD)}$

a) Montrer que f est une symétrie orthogonale

b) Montrer que h est une symétrie glissante dont on précise l'axe et le vecteur

Exercice 8

Dans le plan orienté dans le sens direct

Soit ABC un triangle équilatéral direct, , j et K sont les milieux respectives de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$

f une isométrie qui envoie A sur B et B sur C .

1. Montrer que si f n'admet pas de points invariants, alors f est une symétrie glissante.

2. On suppose que f admet un point invariant.

a. Montrer que f n'est pas une symétrie orthogonale.

b. Identifier alors f.

3. Soit Δ et Δ' deus droites du plan

a. Montrer que si $S_{\Delta}\circ S_{\Delta'} \circ S_{(AB)}$ est une symétrie orthogonale alors Δ , $\Delta' et\ (AB)$ sont concourantes ou parallèles

b. Montrer que si $S_{\Delta} \circ S_{(AB)} = S_{(AB)} \circ S_{\Delta}$ alors $\Delta = (AB)$ ou $\Delta = (AJ)$

Exercice1

1)a. Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan d'images respectives $M_1'(z_1')$ et $M_2'(z_z')$ par f

$$M_1'M_2' = |z_2' - z_1'| = \left|i\overline{z_2} + 2 - i\overline{z_1} - 2\right| = |i||\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$$

D'où f est une isométrie

b. Soit $M(z)$ un point invariant par f $\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = i\bar{z} + 2$ Soit $z = x + iy, (x, y) \in$ R²

$$x + iy = ix + y + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + 2 \\ y = x \end{cases} \text{ Impossible}$$

Alors f est sans points fixe ainsi f est une translation ou une symétrie glissante

2)a. Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan d'images respectives $M_1'(z_1')$ et $M_2'(z_z')$ par g

$$M_1'M_2' = |z_2' - z_1'| = \left|i\overline{z_2} + 1 - i - i\overline{z_1} - 1 + i\right| = |i||\overline{z_2 - z_1}| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$$

D'où g est une isométrie

b. Soit $M(z)$ un point invariant par g $\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = i\bar{z} + 1 - i$ soit $z = x + iy, (x, y) \in$ R²

$$\Leftrightarrow x + iy = ix + y + 1 - i \Leftrightarrow \begin{cases} y = x - 1 \\ x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow y = x - 1$$

Donc l'ensemble des points invariant par g est la droite $\Delta : y = x - 1$

3) Soit $M(z)$ un point du plan $M_1(z_1) = g(M)$ et $M'(z') = f(M_1)$

On a $\begin{cases} z_1 = i\bar{z} + 1 - i \\ z' = i\overline{z_1} + 2 \end{cases}$ donc $z' = i\left(\overline{i\bar{z} + 1 - i}\right) + 2 = z + i - 1 + 2 = z + 1 + i$

Alors $z' - z = 1 + i$ d'ou $\overrightarrow{MM'} = \vec{u} + \vec{v}$ ainsi $f \circ g$ est une translation de vecteur $\vec{\omega} = \vec{u} + \vec{v}$

$fog = t_{\vec{\omega}}$ Donc $f = t_{\vec{w}} \circ g^{-1} = t_{\vec{\omega}} \circ S_{\Delta}$ et comme $\vec{\omega}$ est un vecteur directeur de Δ alors f est la symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{\omega}$

Si Δ a pour équation réduite $y = mx + p$ alors $\vec{\omega}\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ

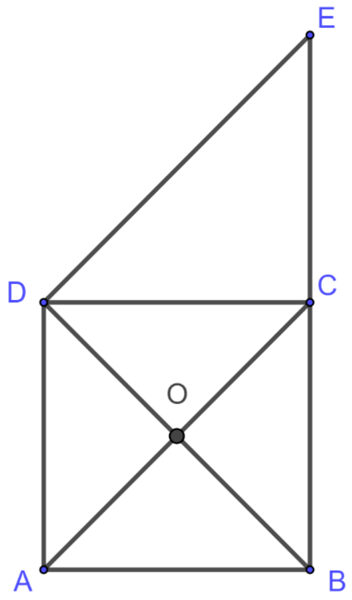
Si Δ a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$ alors $\vec{\omega}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de Δ

Correction

1) Soit $z = x + iy$ et $z^1 = x^1 + iy'$

On a $z' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{2}(x + iy) - \frac{\sqrt{3}}{2}(y - ix) + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \frac{1}{2}(x+iy) + \frac{i\sqrt{3}}{2}(x+iy) + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{-i\frac{\pi}{3}}$$



Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$ deux points du plan d'images respectives $M_1{}'(z_1{}')$ et $M_2'(z_z{}')$ par f

$M_1'M_2{}' = |z_2{}' - z_1{}'| = \left|e^{i\frac{\pi}{3}}\right| |z_2 - z_1| = |z_2 - z_1| = M_1M_2$ donc f est une isométrie

2) Soit $M(z)$ un point invariant par f $\Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow z = e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow$ $z\left(1 - e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$\Leftrightarrow z = \frac{e^{-i\frac{\pi}{3}}}{1-e^{i\frac{\pi}{3}}} = 1$ donc le point I d'affixe 1 est l'unique point invariant par f

3) f est une isométrie qui a un unique point invariant donc f est une rotation de centre I

Soit θ une mesure de son angle et $M \neq I$

$f(M) = M'$ donc $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}}\right)[2\pi]$ alors $\theta \equiv \arg\left(\frac{z\prime - z_I}{z - z_I}\right) \equiv \arg\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Remarquons que $z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}z_I + e^{-i\frac{\pi}{3}}$ donc $z' - z_I = e^{i\frac{\pi}{3}}z + e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}}z_I - e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_I)$

Ainsi f est une rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$

Correction 3

1) a. D'une part on a $\begin{cases} CB = CE = DC \\ C \text{ est le milieu de } [BE] \end{cases}$ Alors le triangle BDE est rectangle en D

D'autre part $\begin{cases} (DC) \perp (BE) \\ C \text{ est le milieu de } [BE] \end{cases}$ donc (DC) est la médiatrice de $[BE]$ alors $DE = DB$

Ainsi le triangle BDE est rectangle et isocèle en D

b. On a $\begin{cases} \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CE} \end{cases}$ Donc $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AC}$ d'où $(DE)//(AC)$ et comme $O \in (AC)$ et D est le projeté orthogonal de O sur (DE) alors $S_{(DE)} \circ S_{(AC)} = t_{2\overrightarrow{OD}} = t_{\overrightarrow{BD}}$

c. La droite (AC) passe par C donc il existe une droite Δ tel que $R_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$

$\Delta = R_{\left(C,\frac{\pi}{4}\right)}(AC) = (BC)$ ainsi $t_{\overrightarrow{BD}} \circ R_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(DE)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(BC)}$

$$= S_{(DE)} \circ S_{(BC)} R_{\left(E,2\left(\widehat{\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EC}}\right)\right)} = R_{\left(E,-\frac{\pi}{2}\right)}$$

2) a. $S_{(BD)} \circ S_{(DA)} = R_{\left(D,2\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB}}\right)\right)} = R_{\left(D,\frac{\pi}{2}\right)}$

b. Cherchons la droite Δ' tel que $S_O = S_{\Delta'} \circ S_{(BD)}$

Δ' est la droite perpendiculaire à (BD) et passant par O donc $\Delta^1 = (AC)$

Alors $S_O \circ R_{\left(D,\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AC)} \circ S_{(BD)} \circ S_{(BD)} \circ S_{(DA)} = S_{(AC)} \circ S_{(DA)} = R_{\left(A,2\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right)\right)} = R_{\left(A,-\frac{\pi}{2}\right)}$

3. $f = S_{(DE)} \circ S_{(DB)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(DA)} = S_D \circ S_A$ car $\begin{cases}(DE) \perp (DB) \\ (AB) \perp (AD)\end{cases}$

Donc $f = S_{\Delta_1} \circ S_{(AD)} \circ S_{(AD)} \circ S_{\Delta_2} = S_{\Delta_1} \circ S_{\Delta_2}$ avec Δ_1 est la perpendiculaire à (AD) en D ,Δ_1 est la perpendiculaire à (AD) en A ainsi $\Delta_1 = (DC)$ et $\Delta_2 = (AB)$

Et par suite $f = S_{(DC)} \circ S_{(AB)} = t_{2\overrightarrow{AD}}$ car $(DC)//(AB)$, $A \in (AB)$ et D est le projeté orthogonal de A sur (AD)

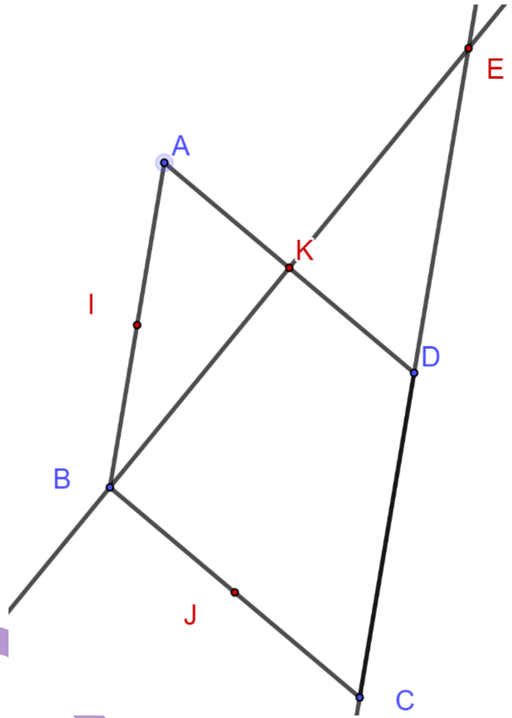
Remarque

$R_{(I,\theta)} \circ R_{(I',\theta')} = S_{\Delta} \circ S_{(II')} \diamond S_{(II')} \circ S'_{\Delta} = S_{\Delta} \circ S'_{\Delta}$ avec $\Delta = R_{\left(I_1\frac{\theta}{2}\right)}(II')$ et $\Delta' = R_{\left(I_1-\frac{\theta'}{2}\right)}(II')$

$R_{(I,\theta)} \circ t_{\vec{u}} = S_{\Delta} \circ S_{(D)} \diamond S_{(D)} \circ S'_{\Delta} = S_{\Delta} \circ S'_{\Delta}$. Avec D est la droite passant par I et de vecteur normal $\vec{u}$

$\Delta = R_{\left(I_1\frac{\theta}{2}\right)}(D)$ et $\Delta' = R_{-\frac{1}{2}\vec{u}}(D)$

Correction 4



1) a. $S_{(BA)} \circ S_{(BD)} = R_{\left(B,2\left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BA}}\right)\right)} = R_{\left(B,\frac{2\pi}{3}\right)}$

b. $R_{\left(B,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(D,-\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(BA)} \circ S_{(BD)} \circ S_{(BD)} \circ S_{\Delta}$ avec $\Delta = R_{\left(D,\frac{\pi}{3}\right)}(BD) = (DC)$

donc $R_{\left(B,\frac{2\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(D,-\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(BA)} \circ S_{(DC)} = t_{2\overrightarrow{DI}}$ car $\begin{cases} (DC)//(BA) \\ D \in (DC). \\ I \text{ est le projetè orthogonal de } D \text{ sur } (AB) \end{cases}$

2)a. $S_{(EB)} \circ S_{(ED)} = R_{\left(E,2\left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EB}}\right)\right)} = R_{\left(E,-\frac{\pi}{3}\right)}$

En effet $\left(\widehat{\overrightarrow{ED},\overrightarrow{EB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{KB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BK}}\right) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$

b. $R_{\left(E,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(C,-\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(EB)} \circ S_{(ED)} \circ S_{(ED)} \circ S_{\Delta}$ avec $\Delta = R_{\left(C,\frac{\pi}{3}\right)}(ED) = (BC)$

Donc $R_{\left(E,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ R_{\left(C,-\frac{2\pi}{3}\right)} = S_{(EB)} \circ S_{(BC)} = S_B$ car $\begin{cases} (BC)//(AD) \\ (Bk) \perp (AD) \end{cases}$ alors $(BK) \perp (BC)$

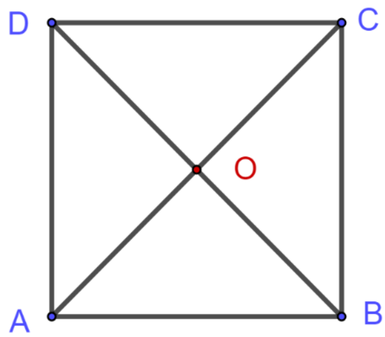
3) a. $S_{(DJ)} \circ S_{(BE)} = t_{2\overrightarrow{BJ}} = t_{\overrightarrow{BC}}$ car $\begin{cases} (DJ)//(BE) \\ B \in (BE). \\ J \text{ est le projetè orthogonal de } B \text{ sur } (DJ) \end{cases}$

En effet $\begin{cases} (BK) \perp (BC) \\ (DJ) \perp (BC) \end{cases}$ donc $(EB)//(DJ)$

b. $t_{\overrightarrow{BC}} \circ R_{\left(E,-\frac{\pi}{3}\right)} = S_{(DJ)} \circ S_{(BE)} \circ S_{(EB)} \circ S_{(ED)} = S_{(DJ)} \circ S_{(ED)} = R_{\left(D,2\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DJ}}\right)\right)} = R_{\left(D,-\frac{\pi}{3}\right)}$

Correction exercice 5

1) a. Première méthode.



On a $f(\{A,B,D\}) = \{A,B,D\}$ donc $f([BD]) \in \{[BD],[AD]_1[AB]\}$ et comme une isométrie conserve les distances alors $f([BD]) = [BD]$ ainsi $f(O) = O$ car une isométrie conserve les milieux

$f([BD]) = [BD]$ donc $f(\{B,D\}) = \{B,D\}$ et comme $f(\{A,B,D\}) = \{A,B,D\}$ alors $f(A) = A$

Deuxième méthode

ABD est rectangle en A et une isométrie conserve orthogonalité donc $f(ABD) = ABD$ est rectangle en $f(A)$ ainsi $f(A) = A$ et comme $f(\{A,B,D\}) = \{A,B,D\}$ Alors $f(\{B,D\}) = \{B,D\}$ il en résulte $f(O) = O$ car une isométrie conserve les milieux

Troisième méthode

O est le centre du cercle $\mathcal{C}$ circonscrit au triangle ABD et comme $f(ABD) = ABD$ donc $f(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$

Ainsi $f(O) = O$

b. Soit $f \in E$ alors $\begin{cases} f(O) = O \\ f(A) = A \end{cases}$ donc $f = Idp$ ou $f = S_{(OA)}$

Réciproquement

Si $f = Idp$ alors $f(ABD) = ABD$

Si $f = S_{(OA)}$ alors $\begin{cases} f(A) = A \\ f(B) = D \\ f(D) = B \end{cases}$ donc $f(ABD) = ABD$

Conclusion :

f est une isométrie qui laisse globalement invariant ABD si et seulement si $f = Idp$ ou $f = S_{(OA)}$

C'est-à-dire $E = \{Id_p, S_{(0A)}\}$

2)a. On a $\begin{cases} S_O(B) = D \\ s_O(c) = A \\ s_O(D) = B \end{cases}$ donc $S_O(BCD) = ABD$

Soit $g \in F \Leftrightarrow g(ABD) = BCD \Leftrightarrow S_O \circ g(ABD) = S_O(BCD) = ABD \Leftrightarrow S_O \circ g \in E$

b. Soit $g \in F \Leftrightarrow S_O \circ g \in E \Leftrightarrow S_O \circ g = Idp$ ou $\Leftrightarrow S_O \circ g = S_{(0A)} \Leftrightarrow g = S_O$ ou $g = S_O \circ S(0A)$

$\Leftrightarrow g = S_\theta$ ou $g = S_{(BD)} \circ S_{(0A)} \circ S_{(0A)} = S_{(BD)}$

3) a. O est le centre de ABCD est une isométrie conserve les barycentres alors $f(O)$ est le centre de $f(ABCD) = ABCD$ donc $f(O) = O$

b. Si $f(A) = A$ comme $f(O) = O$ donc $f = Idp$ ou $f = S_{(CA)}$

Si $f(A) = B$ comme $f(O) = O$ alors f est une rotation de centre O ou $f = S_\Delta$

$R_{(O,\theta)}(A) = B$ Implique que $\theta \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) [2\pi]$ alors $\theta \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ ainsi $f = R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$

$S_{\Delta_1}(A) = B$ Implique que Δ_1 est la médiatrice de $[AB]$

Si $f(A) = C$ comme $f(O) = O$ alors on proue facilement que $f = S_{(BD)}$ ou$f = S_O$

Si $f(A) = D$ comme $f(O) = O$ alors on proue facilement que $f = S_{\Delta_2}$ ou $f = R_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$

Δ_2 Est la médiatrice de $[AD]$

Conclusion

Si f est une isométrie qui laisse globalement invariant le carré ABCD alors

$f = Idp$ ou $f = S_{(AC)}$Ou $f = S_{(BD)}$ ou $f = S_{\Delta_1}$ ou $f = S_{\Delta_2}$ ou $f = R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}$ ou $f = R_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}$ ou $f = S_O$

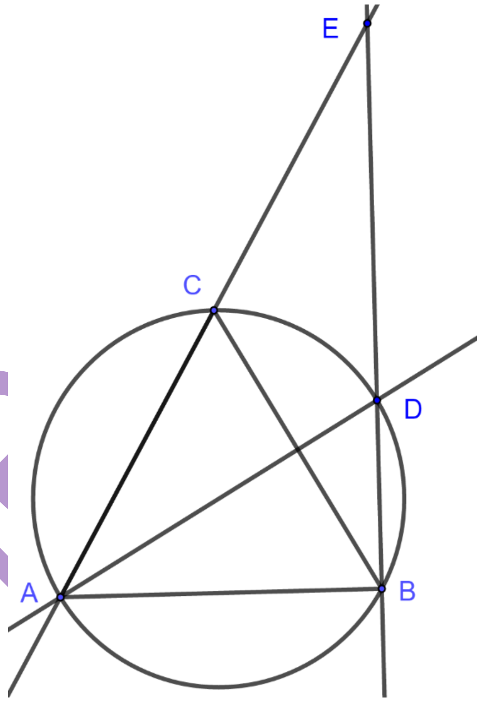
Réciproquement

On vérifie aisément que ces huit isométries laisse globalement invariant le carré ABCD

Conclusion :

L'ensemble $= \{Idp\ ,S_{(AC)},S_{(BD)},S_{\Delta_1},S_{\Delta_2}\ ,R_{\left(O,\frac{\pi}{2}\right)}\ ,R_{\left(O,-\frac{\pi}{2}\right)}\ ,\ S_O\}$

Correction exercice 6



1)a. D'une part

Le triangle ABD est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et $[AD]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$ donc le triangle ABD est rectangle en B et comme $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

D'autre part

Dans le cercle $\mathcal{C}$ A et B $\in \overset{\frown}{CD}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{EA},\overrightarrow{ED}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BD},\overrightarrow{BC}}\right)[2\pi]$ ainsi le triangle BCE est isocèle en C

b. D'une part : on a $\begin{cases} CB = CE \\ CB = CA \end{cases}$ donc $CA = CE$ et comme $C \in [AE]$ alors C est le milieu de $[AE]$

D'autre part : ADC est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et $[AD]$ est un diamètre donc $(AD) \perp (DC)$

Ainsi (DC) est la médiatrice de $[AE]$

2) a. Dans le cercle $\mathcal{C}$ on a A $\in \overset{\frown}{CB}$ et D $\in \overset{\frown}{BC}$ donc $\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Alors $f = R_{\left(D,2\left(\widehat{\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}}\right)\right)} = R_{\left(D,-\frac{2\pi}{3}\right)}$

$g = R_{\left(A,2\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)\right)} = R_{\left(A,\frac{2\pi}{3}\right)}$

b. $\Delta = R_{\left(D,-\frac{\pi}{3}\right)}(AD) = (DC)$ car $\left(\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi]$

$\Delta' = R_{\left(A,-\frac{\pi}{3}\right)}(AD)$ donc Δ' est la droite perpendiculaire à (AC) en A

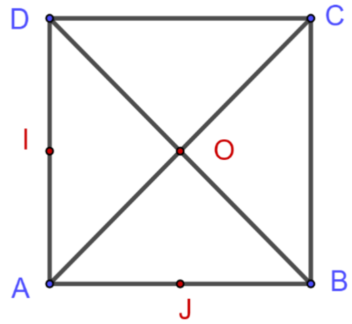
$f \circ g = S_{(DC)} \circ S_{\Delta'} = t_{2\overrightarrow{AC}} = t_{\overrightarrow{AE}}$

Car $\begin{cases} \Delta' \perp (AC) \\ (DC) \perp (AC) \end{cases}$ donc $\Delta^1//(DC)$ et $\begin{cases} A \in \Delta'. \\ C \ est\ le\ projetè\ orthogonal\ de\ A\ sur\ (DC) \end{cases}$

Exercice 7

1)a. $S_{(AD)} \circ S_{(AC)} = R_{\left(A,2\left(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}}\right)\right)} = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)}$

$S_{(AC)} \circ S_{(BC)} = R_{\left(C,2\left(\widehat{\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA}}\right)\right)} = R_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)}$



b. $R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ R_{\left(C,-\frac{\pi}{2}\right)} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(BC)} = S_{(AD)} \circ S_{(BC)} = t_{2\overrightarrow{BA}}$

car $\begin{cases} (AD)//(BC) \\ A \text{ est le projetè orthogonal de } B \text{ sur } (AD) \\ B \in (BC). \end{cases}$

2) a. $g = R_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(BD)} = S_{(AD)} \circ S_{(AC)} \circ S_{(BD)} = S_{(AD)} \circ S_O$

Car (AC) et (BD) sont perpendiculaire en O

b. On $(OI) \perp (OJ)$ en O alors $S_{(OJ)} \circ S_{(OI)} = S_O$ donc $g = (S_{AD}) \circ S_{(OJ)} \circ S_{(OI)} = t_{2\overrightarrow{JA}} \circ S_{(OI)}$

$= t_{\overrightarrow{BA}} \circ S_{(OI)}$ et comme $\overrightarrow{BA}$ est un vecteur directeur de (OI) alors g est une symétrie glissante d'axe $(0I)$ et de vecteur $\overrightarrow{BA}$

3) a.on a $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de la droite (AD) donc il existe une droite Δ tel que

$t_{\overrightarrow{AB}} = S_\Delta \circ S_{(AD)}$ Alors $\Delta = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}}(AD) = (OJ)$ ainsi $f = S_{(IJ)}$

b. $h = t_{\overrightarrow{AC}} \circ S_{(AD)} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{(AD)} = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(IJ)}$ et comme $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de (IJ) alors g est une symétrie glissante d'axe (IJ) et de vecteur $\overrightarrow{BC}$

Remarque

Si $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ on a trois cas

1$^{\text{èr.}}$ Cas

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ alors $f = t_{\vec{u}} \circ S_\Delta = S_\Delta \circ t_{\vec{u}}$ est une symétrie glissante

D'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$

2$^{\text{ème.}}$ Cas

Si $\vec{u}$ est un vecteur normal de Δ alors $t_{\vec{a}} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$ avec $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{u}}(\Delta)$ ainsi $f = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} \circ S_\Delta = S_{\Delta'}$

Donc f est une symétrie glissante

3$^{\text{ème.}}$ Cas

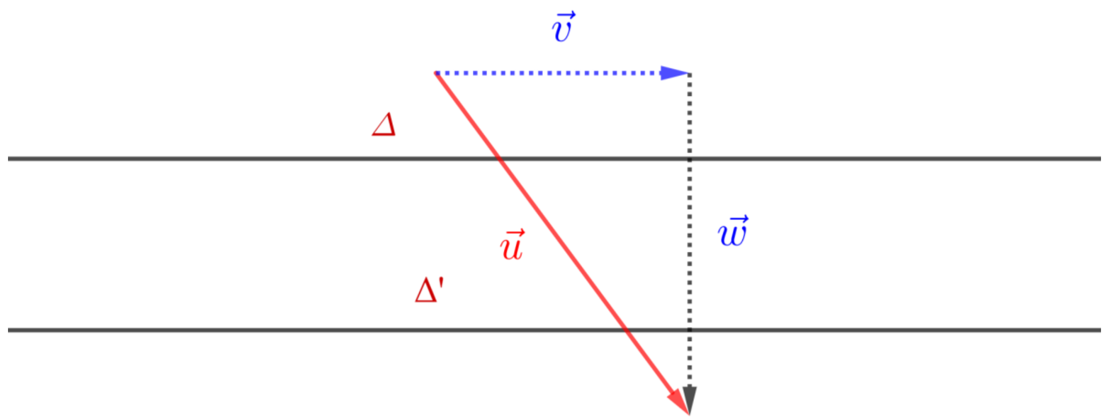
Si $\vec{u}$ est ni directeur ni normal à Δ on décompose $t_{\vec{u}}$ suivant deux translations de vecteurs respectives

$\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ et $\vec{\omega}$ un vecteur normal à Δ

$f = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{w}} \circ S_{\Delta} = t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta}$, et comme $\vec{w}$ est un vecteur normal à Δ donc d'après la deuxième cas

$t_{\vec{w}} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta}'$ Avec $\Delta' = t_{\frac{1}{2}\vec{w}}(\Delta)$ ainsi $f = t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta'}$, or $\Delta'//\Delta$ alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de Δ'

Ainsi f est une symétrie glissante d'axe Δ' et de vecteur $\vec{v}$



Exercice 8

1) a. Si f est une isomètre sans points fixes alors f et soit une translation soit une symétrie glissante

Supposons que f est une translation comme $\begin{cases} f(A) = B \\ f(B) = C \end{cases}$ alors $\vec{AB} = \vec{BC}$ absurde

Si f est une symétrie glissante d'axe Δ et de vecteur $\vec{u}$

$\begin{cases} f \circ f = t_{2\vec{u}} \\ f \circ f(A) = c \end{cases}$ donc $2\vec{u} = \vec{AC}$ alors $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{AC}$

$\begin{cases} f(A) = B. \\ I \text{ est le milieu de } [AB] \end{cases}$ donc $I \in \Delta$ et $\begin{cases} f(B) = C \\ J \text{ est le milieu de } [BC] \end{cases}$ alors $J \in \Delta$ ainsi $\Delta = (IJ)$

2) a. Si f admet un point invariant alors f est soit une rotation soit une symétrie orthogonale soit l'identité du plan

$\begin{cases} f(A) = B \\ A \neq B \end{cases}$ donc $f \neq id_p$, $\begin{cases} f \circ f(A) = C \\ A \neq C \end{cases}$ donc f n'est pas une symétrie orthogonale

Si f est une rotation de centre ω et d'angle θ

$\begin{cases} f(A) = B \\ f(B) = C \end{cases}$ donc $\theta \equiv \left(\widehat{\vec{AB}, \vec{BC}}\right) \equiv \pi + \left(\widehat{\vec{BA}, \vec{BC}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

ω est l'intersection des médiatrices de $[AB]$ et $[BC]$ donc ω est le centre de gravité de ABC

3) a. Supposons que $S_\Delta \circ S_{\Delta'} \circ S_{(AB)} = S_\Delta''$ donc $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = S_\Delta'' \circ S_{(AB)}$

Si $\Delta // \Delta'$ donc $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = t_{\vec{u}}$ alors $S''_\Delta \circ S_{(AB)} = t_{\vec{u}}$ ainsi les droites Δ ,Δ' et (AB)

Sont parallèles car $\vec{u}$ est un vecteur normal a chacune des droites Δ ,Δ' et (AB)

Si $\Delta \cap \Delta' = \{\Omega\}$ alors $S_\Delta \circ S_{\Delta'} = R_{(\Omega,\theta)}$ donc $S''_\Delta \circ S_{(AB)} = R_{(\Omega,\theta)}$ ainsi $\Omega \in (AB)$

D'où les trois droites son concourantes

b. Supposons que $S_\Delta \circ S_{(AB)} = S_{(AB)} \circ S_\Delta$

Si $\Delta // (AB)$ alors $S_\Delta \circ S_{(AB)} = t_{\vec{u}}$ donc $S_{(AB)} \circ S_\Delta = t_{-\vec{u}}$ et comme $S_\Delta \circ S_{(AB)} = S_{(AB)} \circ S_\Delta$

Alors $\vec{u} = -\vec{u}$ ainsi $\vec{u} = \vec{0}$ et par suite $\Delta = (AB)$

Si $\Delta \cap \Delta' = \{\Omega\}$ alors $S_\Delta \circ S_{(AB)} = R_{(\Omega,2\theta)}$ donc $S_{(AB)} \circ S_\Delta = R_{(\Omega,-2\theta)}$

Et comme $S_\Delta \circ S_{(AB)} = S_{(AB)} \circ S_\Delta$ alors $2\theta = -2\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ainsi $\theta = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

C'est-à-dire $\theta = k\pi, k \in \mathbb{Z}$ ou $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ or Δ et (AB) sont sécantes

Donc $\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ et par suite Δ et (AB) sont perpendiculaires