Exercice 1 :

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^3 = 1$. (On donnera les solutions sous forme exponentielle)

2. Soit $\alpha \in IR$ avec $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

a) Montrer que si $z = e^{i\alpha}$; alors $\frac{z-i}{z+i} = e^{i(\alpha - \frac{\pi}{2})}$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ le système

$$(S) : \begin{cases} |z| = 1 \\ (z-i)^3 = (\bar{z}+i)^3 \end{cases}$$

3. On considère maintenant dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E) : z^3 = 2(-1+i\sqrt{3})\bar{z}$

a) On pose $z = re^{i\beta}$ avec $r \in IR_+^*$ et $\beta \in [0; 2\pi[$

Montrer que : (E) est équivalente dans $\mathbb{C}^*$ à l'équation $(E') : r^2 e^{i4\beta} = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) En déduire sous forme exponentielle les solutions de (E)

Exercice 2 :

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E) : z^2 - (3+e^{i\theta})z + 2 + 2e^{i\theta} = 0 ; où\ \theta \in IR$

1. Résoudre l'équation *(E)* et écrire les solutions sous forme exponentielle

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit *M(z)* et *M'(z')* tel que $\frac{z'-2}{z-2}$ soit réel et $\frac{z'}{z}$ soit imaginaire

a) Déterminer *z'* pour *z = i*

b) Déterminer *z'* lorsque *z* est un réel non nul distinct de 2

c) On suppose que *M'* existe. Donner une construction de *M'* connaissant *M*

d) En déduire que *M'* existe si et seulement si z n'est pas solution de *(E)*

Exercice 3 :

Le plan complexe *P* est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout point *M* d'affixe *z* non réel, on associe le point *M'* d'affixe $z' = \frac{z\bar{z}}{\bar{z}-z}$

1. Montrer que *M'* appartient à $(0, \vec{v})$

2. Montrer que $|z'| = |z'-z|$. Interpréter le résultat géométriquement.

3. Soit *M* un point n'appartenant pas à $(0, \vec{u})$. Donner une construction géométrique de *M'*

4. Soit *M* un point n'appartient pas à $(0, \vec{u})$

a) Montrer que $\frac{z'-z}{z'} = \frac{z}{\bar{z}}$

b) En déduire l'ensemble *E* des points *M* pour lesquels le triangle *OMM'* est rectangle en *M'*

Exercice 4 :

A tout point *M* du plan d'affixe z on associe le point *M'(z')* tq. $z' = \frac{1}{2}(\bar{z}-i)^2$

Soit *A(i)* et *B(-i)*

1. Déterminer l'ensemble des points *M* tq. *M'=A*

2. a) Trouver une relation entre *OM'* et *BM*

b) Déduire l'ensemble *E* des points *M* de *P* tq. $M' \in \xi(0,2)$. Représenter *E*

3. a) Trouver une relation entre $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM'}})$ et $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{BM}})$

b) Déduire l'ensemble *F* des points M de P tq. $M' \in [OA]$. Représenter *F*

4. Donner les affixes des points *P* et *Q* intersection des ensembles *E* et *F*

5. Soit $z = e^{i\theta}$ avec $\theta \in [-\pi, \pi[$

a) Ecrire sous forme exponentielle *z'*.

b) On note *Z* le nombre complexe *z'* lorsque $\theta = \frac{\pi}{6}$. Donner la forme algébrique de *Z*

c) Déterminer les entiers *n* pour lesquels Z^n est un réel

Exercice 5 :

Le plan est rapporté à un RON $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout nombre complexe $z \neq -i$, on associe le nombre complexe $z' = \frac{z+2i}{1-iz}$; et soit *M, M', A, B* et *C* d'affixe respectives : *z, z', i, – i* et *– 2 i*

1. Donner une interprétation géométrique de $|z'|$, en déduire l'ensemble des points *M* lorsque *M'* varie sur le cercle trigonométrique

2. a) Montrer que si $M \neq B$ et $M \neq C$; on a $(\vec{u}, \widehat{\overrightarrow{OM'}}) \equiv (\overrightarrow{MB}, \widehat{\overrightarrow{MC}}) + \frac{\pi}{2} [2\pi]$

b) Quel est alors l'ensemble (φ) des points *M* pour lesquels $z' \in IR_+^*$. Construire (φ)

3. Soit le nombre complexe *Z* définie par :

$Z = \frac{z'-i}{z-i}$; pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$

a) Donner une interprétation géométrique de $Arg(Z)$

b) Vérifier que $Z=\frac{-1}{z^2+1}$ et que si $z=e^{i\theta}$ avec $\theta\in[0,\pi]\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$ alors : $Z=\frac{-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}$

En déduire en fonction de θ le module et un argument de Z

c) Pour quelles valeurs de θ, Z est-il réel ? Interpréter de résultat à l'aide de a)

Exercice 6 :

Soit $\theta\in]-\pi,\pi[$, et l'équation dans $\mathbb{C}$;

$(E): iz^2+(2\sin\theta)z-2i(1+\cos\theta)=0$

1. a) Vérifier que $\sin^2\theta-2(1+\cos\theta)=(i(1+\cos\theta))^2$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation *(E)*. On note z' et z'' les racines de *(E)* avec $R(z')>0$

c) Ecrire z' et z'' sous forme exponentielle.

En déduire $\frac{z''}{z'}=e^{i(\pi-\theta)}$

2. Soit $M'(z')$ et $M''(z'')$ dans un RON $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ})$

a) Montrer que M' et M'' sont symétriques par rapport à la droite *(OJ)*

b) Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles le triangle $OM'M''$ soit équilatéral

3. Pour $\theta=\frac{2\pi}{3}$, résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation

$iz^4+(2\sin\theta)z^2-2i(1+\cos\theta)=0$

Exercice 7 :

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$. Soit l'équation

$(E): z^2-(1+2i\sin\theta)z+e^{i\theta}-1=0$; $\theta\in[0,\pi[$

1. Montrer que $e^{i\theta}$ est une solution de l'équation *(E)*

2. Résoudre alors l'équation *(E)*

3. On considère les points $A\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\end{pmatrix}$; $M_1(e^{i\theta})$ et $M_2(1-e^{-i\theta})$

a) Montrer que M_2 est l'image de M_1 par un antidéplacement que l'on caractérisera

b) Déterminer l'ensemble φ des points M_1 lorsque θ varie et en déduire l'ensemble φ' des points M_2 puis construire φ

c) Montrer qu'il existe une unique valeur θ_1 de θ pour laquelle OAM_1M_2 est un parallélogramme et donner une valeur approchée de θ_1 à 0,1 près.

Exercice 8 :

P le plan muni d'un RON direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{-2i\}$ On pose $Z=\frac{2\bar{z}+4i}{\bar{z}-2i}$. Soient *A* et *B* les points d'affixes *(-2i)* et *(2i)*

1. a) Déterminer l'ensemble $\varphi=\{M(z)\ tq\ Arg(Z)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]\}$

b) Construire φ

2. a) Déterminer les racines cubiques de $-i$ sous forme exponentielle

b) Soit $\theta\in]0,2\pi[$. Calculer z en fonction de $\frac{\theta}{2}$ sachant que $\frac{z-2i}{z+2i}=e^{i\theta}$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$; $\left(\frac{2\bar{z}+4i}{\bar{z}-2i}\right)^3=8i$

Exercice 9 :

P le plan complexe rapporté à un RON direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soit *A(1)* et $f: P\to P$, $M(z)\mapsto M'(z')$ tq $z'=2z-z^2$

1. Déterminer les points invariants par f

2. Dans cette question, on suppose que $M\in\zeta(0,1)\setminus\{A\}$

a) Montrer que *AM=MM'*

b) Montrer que $\frac{z'-1}{z}$ est réel

c) En déduire que les points *A* et *M'* sont symétriques par rapport à la tangente Δ en *M* au cercle ζ

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation

$(E): 2z-z^2=1+e^{i2\theta}$ avec $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

On notera z_1 et z_2 les solutions de *(E)* avec $\text{Im}(z_1)\geq 0$

4. Soit $M_1(z_1)$ et $M_2(z_2)$

a) Montrer que M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à un point fixe que l'on précisera

b) Déterminer et construire l'ensemble φ, des points M_1 quand θ varie dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

...mble φ_2 des points M_2

EXERCICE 1 : (5 points) Bac (Contrôle) M^me KHADDAR

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante :

$$(E) : z^3 - 2(\sqrt{3} + i)\, z^2 + 4\,(1 + i\sqrt{3})\, z - 8\,i = 0$$

1) a – Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.
   b – Résoudre (E) dans $\mathbb{C}$.
   c – Donner la forme exponentielle de chacune des solutions de (E)

2) Soit θ un réel et E_θ l'équation :

$$(E_\theta) : z^3 - 2\,e^{i\theta}\,(\sqrt{3} + i)\, z^2 + 4\,e^{2i\theta}\,(1 + i\sqrt{3})\, z - 8\,i\,e^{3i\theta} = 0$$

   a – Démontrer que : $(z\,e^{-i\theta})$ est solution de (E) si et seulement si z est solution de (E_θ).
   b – En déduire les solutions de l'équation (E_π) suivante :

$$z^3 + 2\,(\sqrt{3} + i)\, z^2 + 4\,(1 + i\sqrt{3})\, z + 8\,i = 0$$

3) Représenter dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les images des solutions des équations (E) et (E_π) et vérifier qu'elles sont les sommets d'un polygone régulier.

EXERCICE 2 : (5 points) Bac

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes on considère l'équation

$$E_d : z^3 + (3 - d^2)z + 2i\,(1 + d^2) = 0$$

où d est un nombre complexe donné de module 2 .

1) a – Vérifier que 2i est une solution de E_d .
   b – Résoudre alors l'équation E_d.

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A, B, M, N d'affixes respectives 2i ; - i ; - i + d ; - i – d.
   a – Calculer MN et déterminer le milieu de [MN].
   b – En déduire que lorsque d varie, les points M et N appartiennent à un cercle fixe que l'on précisera.
   c – Dans le cas où AMN est un triangle, montrer que O est le centre de gravité du triangle AMN.
   d – En déduire les valeurs de d pour lesquelles le triangle AMN est isocèle de sommet principal A.

EXERCICE 3 (5 points) Bac

Soit a un nombre complexe non nul et E l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation E.

2) Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives 1 + ia et 1 – ia .
   On pose $a = a_1 + ia_2$; a_1 et a_2 réels .
   a – Montrer que les points O, A et B sont alignés si et seulement si $a_1 = 0$.
   b – Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux si et seulement si $|a| = 1$.

3) On suppose que $a = e^{i\alpha}$ où $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   a – Vérifier que pour tout réel x , on a

$$1 + e^{ix} = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

$$1 - e^{ix} = -2\,i\sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}} .$$

   b – En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres complexes 1 + ia et 1 – ia.
   c – Déterminer a pour que les points O, A et B forment un triangle isocèle rectangle en O.

Exercice n°4 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit le point A(i) et f l'application qui à tout point M d'affixe z distinct de i, associe le point M' tel que

$$z' = \frac{-z^2}{z-i}.$$

a) Soit G l'isobarycentre des points A, M et M'. Vérifier que $z_G = \frac{1}{3(z-i)}$

b) En déduire que si M est un point du cercle (Γ) de centre A et de rayon $\frac{1}{2}$ alors G est un point du cercle de centre O et de rayon $\frac{2}{3}$.

c) on a marqué un point C sur le cercle (Γ). On note C' l'image de C par f. Construire le point G et en déduire une construction du point C'.

EXERCICE 5

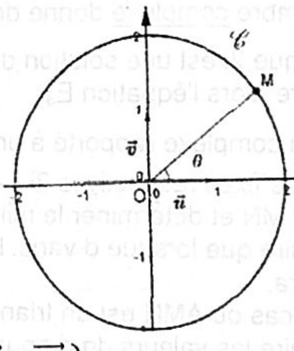
1 .a. Vérifier que $1-i\sqrt{3}$ est une racine carrée de $-2-2i\sqrt{3}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^2-(3+i\sqrt{3})z+2(1+i\sqrt{3})=0$.

c. Donner les solutions de (E) sous forme exponentielle.

2. On désigne par A, B et B' les points d'affixes respectives 2, $b=1+i\sqrt{3}$ et $\bar{b}$.

Dans l'annexe ci-jointe, on a placé sur le cercle **C** de centre O et de rayon 2 le point M d'affixe $z=2e^{i\theta}$ avec $\theta \in]-\pi,\pi]$.



a. Construire les points A, B, B' et le point M' d'affixe $z'=2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$.

b. Montrer que $z'=\frac{b}{2}z$.

3. On désigne par K et K' les milieux respectifs de $[BM]$ et $[B'M']$.

montrer que lorsque M varie sur le cercle **C**, la médiatrice de $[KK']$ passe par un point fixe que l'on précisera.

EXERCICE 6

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$

1/ a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_θ) : $z^2 - 2\cos^3(\theta)\cos(3\theta)\, z + \cos^6(\theta) = 0$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

b) En déduire les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $T^6 - 2\cos^3(\theta)\cos(3\theta)\, T^3 + \cos^6(\theta) = 0$

c) Soient A, B et C les points du plan d'affixes respectives $z_A = \cos(\theta)\, e^{i\theta}$, $z_B = \cos(\theta)\, e^{i\left(\theta+\frac{2\pi}{3}\right)}$ et $z_C = \cos(\theta)\, e^{i\left(\theta+\frac{4\pi}{3}\right)}$

Montrer alors que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle que l'on précisera.

2/ Soient les points I, M et N d'affixes respectives $z_I = 1$, $z_M = e^{i\theta}+1$ et $z_N = i\,e^{i\theta}+1$ où $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a) Ecrire z_M et z_N sous la forme exponentielle

b) Vérifier que pour tout $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $z_N - 1 = i\,(z_M - 1)$

En déduire que N est l'image du point M par une rotation que l'on déterminera.

c) Déterminer et construire les ensembles respectifs des points M et N lorsque θ varie dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Exercice 7 Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $Z^4 = 16$
2. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $(Z-i)^3 = 4(\overline{Z}+i)$

a. Vérifier que $Z_0 = i$ est une solution de (E')

b. Montrer que si Z est une solution de (E') distincte de Z_0 alors $|Z-i|^2 = 4$.

c. En déduire que ... de Z_0 alors $Z-i$ est une solutio...

d. Résoud...

Exercice : 8

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct. (Unité graphique 2 cm). On désigne par θ un nombre réel tel que: $-\pi < \theta < \pi$

On appelle A, M et N les points d'affixes respectives 1, $e^{i\theta}$, $1 + e^{i\theta}$.

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique et par $\mathcal{C}'$ le cercle de centre A et de rayon 1.

1) Montrer que N est un point de $\mathcal{C}'$ et donner la nature du quadrilatère OANM.

2) Tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, et placer A, M et N dans le cas où $\theta = \frac{\pi}{6}$.

3) On pose $u = 1 + e^{i\theta}$, avec $-\pi < \theta < \pi$.

a/ Montrer que u est solution de l'équation: $z^2 - (2 + 2\cos\theta)z + 2 + 2\cos\theta = 0$.

En déduire la seconde solution.

b/ Quelles sont les solutions de l'équation: $z^2 - 3z + 3 = 0$.

4) On considère l'équation (E) : $z^2 - az + a = 0$ où a est un réel tel que $0 < a < 4$. On nomme R le point d'affixe a, et T le milieu de [OR]. La perpendiculaire à l'axe réel passant par T coupe $\mathcal{C}'$ en deux points u et u'.

Montrer que les affixes de u et de u' sont les solutions de (E).

EXERCICE 9

Soit m un paramètre complexe et (E) l'équation dans C définie par : $(1-i)z^2 - 2(m+1)z + (1+i)(m^2+1) = 0$.

1/a) Résoudre l'équation (E) , on note z' et z'' les solutions de (E) avec z' la solution telle que $z' - m$ est indépendant de m .

b) Lorsque m= $e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$; écrire z' et z'' sous forme exponentielle . En déduire dans ce cas que $\frac{z''}{z'}$ est réel .

2/ Soient M' et M'' les points images des solutions z' et z'' de (E) A et M les points d'affixes respectives 1 + i et m dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Caractériser les applications t et r qui transforment respectivement (M en M') et (M' en M'')

b) Lorsque $M' \neq M''$ donner la nature du triangle AM'M'' .

3/a) Déterminer et construire les ensembles C' et C'' décrits respectivement par M' et M'' lorsque M décrit le cercle trigonométrique C .

b) Déduire de ce qui précède que les points O, M' et M'' sont alignés lorsque M décrit C .

Exercice: 10

A tout nombre complexe z non nul,on associe dans le plan orienté,rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, les points A, B C d'affixes respectives: $a = z$; $b = \bar{z}$; $c = \frac{z^2}{\bar{z}}$.

1) on pose $z = re^{i\theta}$; $r > 0$

Exprimer en fonction de r et de θ le module et l'argument de b et c.

2) comment faut- il choisir z pour que les points A,B,C soient distincts deux à deux?

Dans la suite on supposera cette condition réalisée.

3) a/ Montrer que les points A,B,C sont sur un même cercle de centre O.

b/ Montrer que AB = AC.

c/ Le point A étant donné, indiquer une construction géométrique des points B et C. Justifier et réaliser la construction.

4) a/ Quelle mesure peut prendre l'angle ($\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$) ?

b/ Déduire l'ensemble (E) des points A tels que le triangle ABC soit équilatéral. Représenter cet ensemble (E)

EXERCICE 11 1/ Résoudre dans le corps des nombres complexes l'équation : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^3 = 1$.

2/ Soit n un entier naturel non nul et a un nombre complexe .

Soit (E) l'équation d'inconnue z : $\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^n = a$.

a) Prouver ... alors $|a| = 1$.

b) En déduire ... réelle, alors toutes ses racines

I) Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=\frac{2}{e^{x}+e^{-x}}$ et soit $\mathscr{C}$ sa courbe représent[...] un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Etudier les variations de la fonction f.

En déduire que pour tout x de IR on a : $0 < f(x) \leq 1$.

b) Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

2) On considère la fonction g définie sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ par $g(x)=\text{Log}(\text{tg}\,x)$.

a) Montrer que g est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer g'(x) pour x appartenant à $]0,\frac{\pi}{2}[$.

b) Montrer que g admet une fonction réciproque h définie sur IR. Calculer h(0).

c) Montrer que h est dérivable sur IR et que pour tout x de IR, $2h'(x)=f(x)$.

En déduire que pour tout x de IR, $\int_0^x f(t)\,dt = 2h(x)-\frac{\pi}{2}$.

II) Soit n un entier naturel non nul et F_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par

$F_n(x)=\int_0^x f^n(t)\,dt$.

1) a) Calculer $F_1(x)$ en fonction de h(x) et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_1(x)=\frac{\pi}{2}$.

b) Soit K la fonction définie sur IR par $K(t)=\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}$. Montrer que $K'(t)=f^2(t)$.

Calculer alors $F_2(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_2(x)=1$.

2) a) Montrer que l'image de l'intervalle $[0,+\infty[$ par F_n est l'intervalle $[0,\lim\limits_{x\to+\infty}$ [...]

b) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul on a $f(t) < 2e^{-t}$.

En déduire, en utilisant 1-1) a), que pour tout x de $[0,+\infty[$ on a $F_n($[...] que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est finie.

c) Vérifier que pour tout réel t positif ou nul, on a $f(t) \geq e^{-t}$.

Montrer alors que pour tout réel x positif, on a $\frac{1-e^{-nx}}{n} \leq F_n(x)$

et en déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$ est non nulle.

3) Soit la suite (u_n) définie sur IN* par $u_n=\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)$.

a) Donner la valeur de u_1 et la valeur de u_2.

b) En remarquant que $4-(e^t+e^{-t})^2=-(e^t-e^{-t})^2$, montrer que pour tout n de IN* et tout t de $[0,+\infty[$ on a $f^{n-1}(t)f'(t)K(t)=f^{n+2}(t)-f^n(t)$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout n de IN* et tout x de $[0,+\infty[$, on a : $\int_0^x f^{n-1}(t)f'(t)K(t)\,dt=\frac{1}{n}K(x)f^n(x)-\frac{1}{n}\int_0^x f^{n+2}(t)\,dt$.

d) En déduire que pour tout n de IN* et tout x de $[0,+\infty[$, on a :

$$(n+1)F_{n+2}(x)-nF_n(x)=K(x)f^n(x).$$

Montrer alors que $u_{n+2}=\frac{n}{n+1}u_n$.

4) a) Soit n un entier naturel. Déterminer, en fonction de n, les deux termes u_{2n+1} et u_{2n+2}.

b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que pour tout n de IN on a : $\frac{2n}{2n+1} \leq \frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}} \leq 1$.

En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_{2n+2}}{u_{2n+1}}$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{2\times4\times6\times\ldots\times(2n)}{3\times5\times\ldots\times(2n-1)}\right)^2\times\frac{2}{2n+1}\right]=\pi$.

Exercice

Soit $n\in IN^*$ on définie f_n sur $[0,+\infty[$ par: $f_n(x)=x^n(1-\ln x)$ si $x>0$ et $f_n(0)=0$. On appelle C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé

A. Etude de f_1

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_1 à droite de 0.

2) a) Etudier les variations de f_1

b) Tracer C_1

B. Etude de f_n (n > 1).

1) a) Montrer que, pour tout $n>1$; f_n est continue à droite de 0.

b) Etudier la dérivabilité de f_n à droite de 0.

2) Etudier les variations de f_n

3) a) Etudier la position relative de C_n et C_{n+1}

b) Tracer C_2 sur le même repère que ce lui de C_1

C. Soit a un réel strictement positif et $(a\neq e)$.

Soit M_n le point de C_n d'abscisse a et M_{n+1} le point de C_{n+1} d'abscisse a, soit Δ_n la parallèle à l'axe des abscisses passant par M_n

1) Démontrer que, les droites Δ_n, (OM_{n+1}) et la droite d'équation $x=1$ sont concourantes en un point I.

2) En déduire un procédé géométrique de placer M_{n+1} à partir de M_n.

3) On désigne par $A_n(a)$ l'aire (en u.a) du triangle OM_nM_{n+1}

a) Montrer que $A_n(a)=\frac{a}{2}|f_{n+1}(a)-f_n(a)|$

b) Etudier suivant les valeurs de a; $\lim\limits_{x\to+\infty} A_n(a)$