MATHÉMATIQUES

2e Baccalauréat Scientifique

Fonctions logarithmes

Yassine Aouami

version étudiant(e) 3.0

TABLE DES MATIÈRES

Fonctions logarithmes

5

I Fonction logarithme népérien

1. Définition de la fonction ln

Définition

On appelle **fonction logarithme népérien**, notée ln, la **primitive** de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$, qui **s'annule en** 1, et on a :

$$\left(\forall x \in \left]0;+\infty\right[\right) \quad (\ln)'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$

Résultats

1. La fonction ln est **continue** et **strictement croissante** sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
2. Pour tous réels strictement positifs a et b, on a :
   - **a.** $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.
   - **b.** $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.
   - **c.** $\ln(a) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$.
   - **d.** $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 0$.
3. Soit u une fonction définie sur un ensemble E. La fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est **définie** si et seulement si : $\forall x \in E,\ u(x) > 0$.

Applications :

Résoudre, dans $\mathbb{R}$, les équations et les inéquations ci-dessous :

1. $\ln(x^2) = 0$.
2. $\ln(x+1) = \ln(2x+2)$.
3. $\ln(x^2+x+1) = \ln(x+5)$.
4. $\ln(x-1) < 0$.
5. $\ln(2x-1) \leq \ln(x)$.
6. $\ln(x^2-x) \geq \ln(2x)$.

2. Propriétés algébriques

Propriété

Soit a et b deux réels strictement positifs.

1. $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
2. $\ln\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.
3. $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
4. Pour tout r de $\mathbb{Q}$, $\ln(a^r) = r\ln(a)$.

Applications :

1. Exprimer, en fonction des réels $\ln(3)$ et $\ln(2)$, chacun des nombres suivants :
   $\ln\left(\sqrt[3]{6}\right)$, $\ln\left(\dfrac{32}{81}\right)$ et $\ln\left(\dfrac{\sqrt[5]{3}}{\sqrt{9}}\right)$.
2. Simplifier le nombre $A = \ln\left(\sqrt{3+\sqrt{3}}\right) + \ln\left(\sqrt{3-\sqrt{3}}\right)$.
3. Les fonctions $f : x \longmapsto \ln\left(x^4\right)$ et $g : x \longmapsto \ln(x) + \ln\left(x^3\right)$ sont-elles égales ?
4. Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^n > 2020$.

II Étude et représentation graphique de la fonction ln

1. Limites de référence

Théorème (1)

On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.
2. $\lim\limits_{x\to0^+} \ln(x) = -\infty$.

Applications :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{2}{x} + 2\ln(x)$.
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} (1-x)\ln(x)$.
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x-1}{x}\right)$.
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{-4x+1}{\ln(x)}$.
5. $\lim\limits_{x\to0^+} (2x^2-1)\ln(x)$.
6. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Théorème (2)

On a les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0.$
2. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x) = 0.$
3. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1.$
4. $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1.$
5. Pour tout entier naturel n non nul ($n \in \mathbb{N}^*$), on a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to0^+} x^n\ln(x) = 0$$

Applications :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^2-3-x\ln(x).$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln\left(x^5\right)}{x^7}.$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(2-x)}{x}.$
4. $\lim\limits_{x\to0^+} x^3\ln\left(x^4\right).$
5. $\lim\limits_{x\to0^+} \sqrt{x}\ln(x).$
6. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(\dfrac{1}{x}\right).$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x^2+x+1)}{x^3}.$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(x^2+1)}{x}.$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2-1}.$
10. $\lim\limits_{x\to1} \dfrac{\ln(x^2-2x+2)}{x-1}.$
11. $\lim\limits_{x\to0} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right).$
12. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln^2(x)-x.$
13. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{\ln^2(x)}{x}.$
14. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln^2(x)}{x}.$
15. $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln^2(x).$

2. Le nombre d'Euler

Propriété

L'équation $\ln(x)=1$ admet une solution unique dans l'intervalle $]0;+\infty[$, appelée **nombre d'Euler** et on le **note** e : $\ln(\mathrm{e})=1$.
Une valeur approchée du réel e est : $2.718281828...$.

Applications :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\ln(x-1)=1.$
2. Soit $\in \mathbb{N}^*$. Simplifier le nombre : $\ln\left(\dfrac{\ln\left(e^n\right)}{\ln\left(\sqrt{e^n}\right)}\right).$

3. Tableau de variations et courbe représentative de la fonction ln

On note $(\mathcal{C}_{\ln})$ la courbe représentative de la fonction ln.

1. On résume les variations et les limites de la fonction ln dans le tableau suivant :

x	0		1		e		$+\infty$
$\ln'(x)$	||			$+$			
$\ln(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

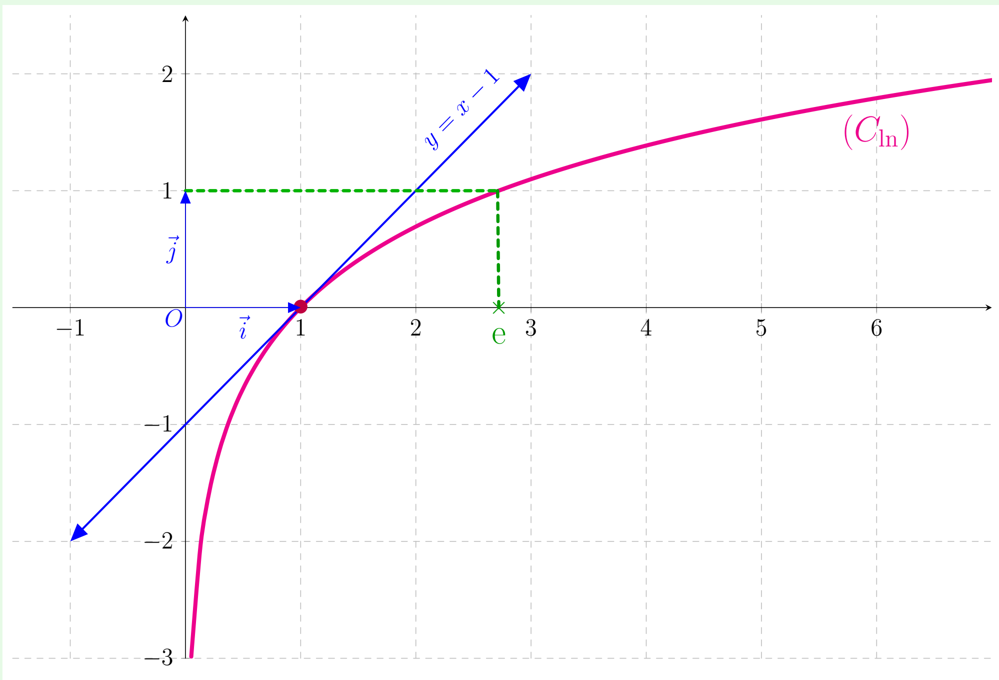
2. Une équation de la tangente à la courbe $(\mathcal{C}_{\ln})$ au point $A(1;0)$ est $y = x - 1$ (car $\ln'(1) = 1$ et $\ln(1) = 0$).

3. L'axe des ordonnées est une asymptote de La courbe $(\mathcal{C}_{\ln})$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty\right)$.

4. La courbe $(\mathcal{C}_{\ln})$ présente une branche parabolique de direction l'axes des abscisses au voisinage de $+\infty$ $\left(\text{car } \lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty \text{ et } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0\right)$.

5. La courbe $(\mathcal{C}_{\ln})$ est convexe $\left(\text{car } \forall x > 0,\ (\ln)''(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0\right)$.

6. On a alors la courbe représentative de la fonction ln ci-dessous :



4. Dérivée de la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$

Théorème (1)

Soit u une fonction **dérivable** et **strictement positive** sur un intervalle I $(\forall x \in I,\ u(x) > 0)$.
La fonction $f : x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Théorème (2)

Soit u une fonction **dérivable** et **ne s'annule pas** sur un intervalle I $(\forall x \in I,\ u(x) \neq 0)$.
La fonction $f : x \longmapsto \ln|u(x)|$ est dérivable sur I, et on a :

$$(\forall x \in I) \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Applications :

Étudier le sens de variations de chacune des fonctions ci-dessous :

1. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.
2. $g(x) = \sqrt{x} + \ln(\sqrt{x})$.
3. $h(x) = \ln(|x^3|)$.

Corollaire

Soit u une fonction **dérivable** et **ne s'annule pas** sur un intervalle I $(\forall x \in I,\ u(x) \neq 0)$.
Les fonctions primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sur l'intervalle I sont les fonctions $x \longmapsto \ln|u(x)| + \lambda$, où λ est une constante réelle.

Applications :

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I, dans chacun des cas ci-dessous :

1. $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$ et $I = \mathbb{R}$.
2. $f(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$ et $I =]\pi; 0[$.
3. $f(x) = \dfrac{3}{2x - 6}$ et $I =]-\infty; 3[$.

III Autres fonctions logarithmes

1. Fonction logarithme de base a

Définition

Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$.
On appelle **fonction logarithme de base** a , la fonction, notée $\log_a$, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

Remarques :

- $\log_a(1) = \dfrac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0.$
- Si $a = \mathrm{e}$ alors $\log_{\mathrm{e}}(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(\mathrm{e})} = \ln(x)$, on obtient la fonction logarithme népérien.
- pour tout a de $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$, $\log_a(a) = 1$ et $(\forall r \in \mathbb{Q})$, $\log_a(a^r) = r$.

Propriété

Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$. Pour tous réels strictement positifs x et y, on a :

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
2. $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
3. $\forall r \in \mathbb{Q}$, $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$.

2. Fonction logarithme décimal

Définition

On appelle **fonction logarithme décimal** , la fonction logarithme de base 10, notée $\log$, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Remarques :

- $\log(10) = 1$.
- $\forall r \in \mathbb{Q},\ \log\left(10^r\right) = r$.

Applications :

1. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation et l'inéquation ci-dessous :
   a. $\log(x-5) + \log(x+2) = 1$.
   b. $\log(x^2+1) > 5$.
2. En chimie, l'acidité d'une solution est mesurée par son **pH** : $\mathbf{pH} = -\log[H^+]$.
   Sachant que la concentration en H^+, dans le sang d'humain, est comprise entre $10^{-7.3}$ et $10^{-7.4}$, montrer que le sang est basique.