Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°11 Intégrales	Mr : Mourad EL arbi 4ème Math

1 On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^n}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$.

① Calculer u_1.

② a) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

③ Montrer que pour tout $n \geq 1$, $u_{n+2} = \frac{\sqrt{2}}{n+2} - \frac{n+1}{n+2} \times u_n$.

④ En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

2 On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1}(x)}$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2(x)}{\cos^{2n+1}(x)}dx$

① a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n-1} = J_n$.

b) En déduire la monotonie de la suite (I_n).

② a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \frac{2^n}{\sqrt{2}} - (2n-1)J_n$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \frac{2^n}{\sqrt{2}}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq \frac{2^{n-1}}{\sqrt{2}\,n}$.

d) Montrer que pour tout $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

e) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

3 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$.

① Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

② Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{1+2n}$.

③ Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n}{1+2n}$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (-1)^n (v_n - u_0)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

4 Soit (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_n = \sum\limits_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p}}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \times u_n$, $n \geq 1$.

① a) Montrer que pour tout entier $p \geq 1$, $\int_p^{p+1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}}$.

b) Montrer que pour tout entier $p \geq 2$, $\int_{p-1}^{p} \frac{dx}{\sqrt{x}} \geq \frac{1}{\sqrt{p}}$.

c) En déduire que pour tout entier $n \geq 1$, $-2 + 2\sqrt{n+1} \leq u_n \leq -1 + 2\sqrt{n}$.

② Déterminer les limites éventuelles des suites (u_n) et (v_n).