L.P.A **Ben Mbarek Badreddine**	**Intégrales**	**4eme** **2019/2020**

Exercice 1 :

Calculer l'intégrale I : 1/ $I = \int_0^{\frac{\sqrt{\pi}}{2}} \frac{2x}{cos^2x^2}dx$

2/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}}(cos^3x + sin^3x)dx$ 3/ $I = \int_0^2(1 - |x - 1|)^3dx$

4/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\, dx$ 5/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx$ 6/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x\, dx$

Exercice 2 :

Calculer, au moyen d'une intégration par parties, l'intégrale I :

1/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x\, dx$ 2/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx$ 3/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2sinxdx$

4/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x + 1)^2sin2xdx$ 5/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos3xdx$ 6/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos^3xdx$

7/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2sin2xdx$

Donner la valeur approchée de I de 0,001 prés :

8/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xcos2xdx$ 9/ $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{xsinx}{cos^3x}dx$

Exercice 3 :

Soient I et J les intégrales suivantes :

$I = \int_0^{\pi} xcos^2xdx$ et $J = \int_0^{\pi} xsin^2xdx$

Calculer $I + J$ et $I - J$, en déduire I et J

Exercice 4 :

Soient n un entier naturel et I_n l'intégrale égale à : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^n t dt$

1) Calculer I_0 , I_1 et I_2
2) Démontrer la proposition suivante : $\forall\, n \in \mathbb{N}\,, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$ (1)
3) En déduire que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}\,, I_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$
4) Montrer, à l'aie de 1/ , que pour tout entier naturel n, le réel $(n+1)I_n I_{n+1}$ est indépendant de n.

   Calculer ce nombre réel et en déduire, pour tout entier naturel n, I_{2n+1} en fonction de n.

Exercice 5 :

Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $\frac{1}{2(n+1)} \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2} dx \leq \frac{1}{n+1}$

Exercice 6 :

Soit f l'application de $]-1, +\infty[$, définie par : $\forall\, x \in]-1, +\infty[,\ f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$

1) Calculer $f'(x)$ pour tout $x$de $]-1, +\infty[$.

   Déterminer le sens de variation de $f$sur $]-1, +\infty[$.
2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la suite définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}\,, U_n = \int_0^n \frac{dt}{1+t^3}$
   a. Démontrer que la suite (U_n) est croissante
   b. Démontrer les inégalités suivantes : $U_1 \leqslant 1$ et $\int_1^n \frac{dt}{1+t^3} < \int_1^n \frac{dt}{t^3}$ $(n > 1)$

   En déduire que la suite (U_n) est majorée et par la suite convergente.

Exercice 7 :

Soit une fonction continue sur $[0,1]$ telle que, pour tout $x$de $[0,1]$, $m \leq f(x) \leq M$

Déterminer la limite de la suite de terme général : $u_n = \int_0^{\frac{1}{n}} f(x)dx$

Exercice 8 :

Soit f une fonction continue sur IR, on suppose que f est impair.

On pose $F(x) = \int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$ pour tout x réel, montrer que F est impaire.

Exercice 9 :

1) Soit une fonction continue, monotone sur $[0, +\infty[$ et vérifiant $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ ($a$réel donné).

   On pose $I_n = \int_n^{n+1} f(x)dx$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = a$

2) Application : étudier la limite de la suite (I_n).

   a. $I_n = \int_n^{n+1} \frac{dt}{1+t^2}$ b. $I_n = \int_n^{n+1} \frac{t}{1+t^2}dt$

Exercice 10 :

Pour $n \geq 0$, on considère la fonction f_n définie sur $[0, \pi]$ par : $f_n(0) = 2n + 1$ et $f_n(x) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{x}{2}}$ $si\ x \neq 0$

1) Montrer que f_n est continue sur $[0, \pi]$

2) On pose, pour $n \geq 0$, $I_n = \int_0^{\pi} f_n(x)dx$

   a. Vérifier l'égalité $f_n(x) - f_{n-1}(x) = 2\cos(nx)$

   b. En déduire que la suite (I_n) est constante, et calculer I_n.

$$(\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2})$$

Exercice 11 :

Soit f une fonction dérivable sur $[0,1]$, telle que f' soit continue et vérifie : il existe M réel tel que, pour tout x de $[0,1]$, $|f'(x)| \leq M$.

On pose $I_n = \int_0^1 f(x)\,dx$ et $R_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

1) Montrer que pour tout u et v de $[0,1]$:

$$|f(v) - f(u)| \leq M|v - u|$$

2) Etablir l'inégalité

$$|I - R_n| \leq \sum_{k=1}^{n}\left[\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| dx\right]$$

3) En déduire que $|I - R_n| \leq \frac{M}{2n}$

4) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} R_n$

Exercice 12 :

On pose $F(x) = \int_x^{x+2} \sqrt{t^2 - 2t + 2}\, dt$

1) Justifier l'existence de $F(x)$ pour tout $x \in \mathrm{IR}$
2) Montrer que F est dérivable sur IR et calculer $F'(x)$
3) Vérifier que F' est impair. En déduire que F est pair.

Exercice 13 :

Soit h une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle I.

a) Montrer que h^{-1} admet des primitives sur $h(I)$
b) Soit H une primitive de h^{-1}sur $h(I)$. Démontrer que Hoh est une primitive sur I, de la fonction $\sigma: x \mapsto xh'(x)$
c) Soit $(\alpha, \beta) \in I^2$. Déduire de ce qui précède que $\int_{h(\alpha)}^{h(\beta)} h^{-1}(t)\, dt = \int_\alpha^\beta th'(t)\, dt$

Exercice 14 :

Soit $I = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt$ avec $n \in \mathrm{IN}^*$

1) Soit n un entier $k \geq 0$ et soit l'intervalle $J_k = [k\frac{\pi}{n}, (k+1)\frac{\pi}{n}]$
   a. $t$désignant un élément de J_k, donner un encadrement du réel nt
   b. En déduire que $\sin(nt)$ garde un signe constant lorsque t décrit J_k
      Préciser ce signe lorsque $k = 2l \quad (l \in \mathrm{IN})$ puis lorsque $k = 2l + 1 \quad (l \in \mathrm{IN})$
   c. Calculer $\int_{\frac{k\pi}{n}}^{(k+1)\frac{\pi}{n}} |\sin(nt)| dt$
2) Calculer l'intégrale $I = \int_0^\pi |\sin(nt)| dt$
   (On pourra utiliser 1.c et la relation de chasles sur les intégrales.)

Exercice 15 :

$n$étant un entier naturel, on considère la fonction f_n définie sur $[0,1]$ par : $f_0(x) = \sqrt{1-x}$ et $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$ si $n \in \mathrm{IN}^*$ et on donne $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x}dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}dx$ si $n \in \mathrm{IN}^*$.

1) Etudier les variations de f_n
   Déterminer l'unique élément α_n de $]0,1[$tq$f_n'(\alpha_n) = 0$

2) Montrer que (I_n) est une suite décroissante minorée par 0.

Etablir que, pour tout entier $n \geq 1$, on a : $I_n \leq f_n(\alpha_n)$,

En déduire $\lim_{n \to +\infty} I_n$

3) Calculer I_0

4) A l'aide d'une interprétation par parties, établir la relation de récurrence pour $n \geq 1$

$$(2n+3)I_n = 2nI_{n+1}$$

5) Montrer que pour tout n de IN ; $I_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$

Exercice 16 :

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$, on suppose de plus que g possède la propriété suivante pour tout $x \in [a, b]$; $g(x) \geq 0$ et il existe $x_0 \in [a, b]$, $g(x_0) \neq 0$

On désigne par m et M le minimum et le maximum de f sur $[a, b]$ respectivement.

1) Démontrer que : $\forall\, x \in [a, b]$,$mg(x) \leq f(x).g(x) \leq Mg(x)$

2) Déduire qu'il existe c de $[a, b]$ tel que l'on ait : $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$

3) On suppose que f est croissante et à dérivée continue f' sur $[a, b]$

   a. Soit $G : x \mapsto \int_a^x g(t)dt$

   Démontrer que : $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(b)G(b) - \int_a^b G(x)f'(x)dx$

   b. En utilisant 1/ et 2/ démontrer qu'il existe c de $[a, b]$ tel que l'on ait :

$$\int_a^b G(x)f'(x)dx = G(c)[f(b) - f(a)]$$

   c. En déduire le résultat suivant :

   Il existe $c \in [a, b]$ tel que :

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_c^b g(x)dx$$

Exercice 17 :

Soit la fonction F définie sur IR par : $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1) Justifier l'existence de F puis montrer qu'elle est dérivable sur IR et calculer $F'(x)$
2) Soit la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = F(\tan x)$
    a) Montrer que f est dérivable sur $[0,\frac{\pi}{2}[$ et calculer $f'(x)$
    b) Calculer $f(0)$ et déduire que $f(x) = x$. Déduire $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$
3) Soit (U_n) définie sur IN* par $U_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1}$
    a) Montrer que pour tout $x \in$ IR
    $1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} - \frac{1}{1+x^2} = (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}$
    b) Déduire que $U_n - F(1) = (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2}\, dx$
    c) Montrer que $\forall x \in [0,1]$ on a : $\frac{x^{2n+2}}{1+x^2} \leq x^{2n+2}$, déduire que $|U_n - F(1)| \leq \frac{1}{2n+3}$ et calculer $\lim U_n$

Exercice 18 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2 cm)
Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \tan^2 x$. on désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ et par $\mathfrak{D}$ le domaine limitée par $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = \frac{\pi}{4}$ et par $\mathbb{S}$ le solide de révolution obtenu par rotation de $\mathfrak{D}$ autour de l'axe des abscisses.

1) Etudier f puis tracer $\mathcal{C}_f$
2) Calculer l'aire de $\mathfrak{D}$ en cm^2
3) Montrer que $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f^2(x)dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx = \frac{1}{3}$
4) Déduire le volume $\mathcal{V}$ de $\mathbb{S}$ en cm^3

Exercice 19:

Soit $U(x) = 2\sin x - 1$ définie sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$

1) Etudier le sens de variation de U sur $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et montrer que $\forall x \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[, U(x) \in]-3,1[= J$
2) Soit $F(x) = \int_0^{U(x)} \frac{dt}{\sqrt{-t^2-2t+3}}$ $\quad \forall x \in J$
    a) Justifier l'existence de F sur J
    b) Montrer que F est dérivable sur J et calculer $F'(x), \forall x \in J$
    c) Calculer $F\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et montrer que $F(x) = x - \frac{\pi}{6}$ $\quad \forall x \in J$
3) Soit $K = \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{\sqrt{-t^2-2t+3}}$ montrer que $K = F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0)$ puis déduire K.