Chaque grand poète intègre le monde d'une façon qui n'est qu'à lui.. *2014/2015*
[Pierre Emmanuel]

Exercice 1 :
Répondre par Vrai ou Faux en Justifiant

I) Soit f une fonction continue sur [0, 3].
Si $\int_0^3 f(x)dx \geq 0$ alors ∀ x de [0, 3] , $f(x) \geq 0$.

II) Soit $g_n(x) = \frac{(\cos x)^n}{(\cos x)^n+(\sin x)^n}$, $n \geq 2$ et $u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} g_n(x)dx$

a) Le point $I(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de la courbe C_n de g_n.
b) $u_n = \frac{\pi}{4}$; pour tout $n \geq 2$

III)
1) Soient f et g deux fonctions continues sur [0, 3]
Si $\int_0^3 f(x)dx \leq \int_0^3 g(x)dx$
alors pour tout x *de* $[0,3], f(x) \leq g(x)$

2) $\int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) f(1+\cos(x))dx = 0$

IV) (QCM) Pour chaque question, préciser la référence de la seule réponse correcte

1) Soit $I = \int_{-2}^{2} x^3\sqrt{4-x^2}dx$

a) $I > 0$ b) $I < 0$ c) $I = 0$

2) $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2009} dx =$

a) 2010 b) $\frac{1}{2010}$ c) $2\sqrt{2}$

3) Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par :

$f(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$

f est dérivable sur sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$,

f '(x) =

a) $\frac{\tan x}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ b) $\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 x}}$ c) $\frac{1}{\cos x}$

Exercice 2 :
Calculer les intégrales suivantes.

L = $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$, **A** = $\int_0^{\pi/4} \frac{du}{1+\sin 2u}$,

T = $\int_0^{\pi/4} \frac{1+\sin x}{\cos^2 x}dx$; **R** = $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}$

A = $\int_0^2 (1-|x-1|^3)dx$ **C** = $\int_{-6}^{6} |x^2-3x-10| dx$,

H=. $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}dx$

Exercice 3:

Soit : $v_n = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^n}$, $n \in$ IN*

1°) Montrer que pour tout n de IN*, $v_n \leq 1$,
2°) Montrer que la suite v est convergente.
3°) Démontrer que $0 \leq 1 - v_n \leq \frac{1}{n+1}$,
puis déduire la limite de v

Exercice 4:

Soit $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1+x^2}}dx$. Calculer I_0.

Dque pour $n \geq 1$, $(2n+1)I_n = \sqrt{2} - 2nI_{n-1}$.

Exercice 5:

Soit $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}dx$, $n \geq 1$

1)a)Etudier la monotonie de la suite (J_n)
b)Déduire qu'elle est convergente.

2)a)Démontrer que $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$, $n \geq 1$
b)Déduire la limite de J_n

3)Etablir que pour tout $n \geq 1$, $J_n + J_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

4)Déduire que pour tout $n \geq 3$, $\frac{1}{2(n+1)} \leq J_n \leq \frac{1}{2(n-1)}$

Déduire la limite de nJ_n.)

Exercice 6:

Soit (I_n) : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-t}\,dt$ et $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,dt$

Calculer I_0.puis, mque ∀ $n \geq 1$, $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$

Exercice 7 :
Toutes les questions sont indépendantes.

1) Montrer que pour tout n > 2, $\int_0^{n\pi} |\sin x|\,dx = 2n$.

2) Soit f une fonction continue sur [0,1] et vérifiant : $\int_0^1 f(x)dx = \sqrt{2}$.

Montrer que l'équation $f(x) = \sqrt{2}$ admet au moins une solution dans [0,1].

3) Soit a un réel strictement positif et f une fonction continue sur [0 , a].

Soit F la fonction définie sur [0 , a] par :

$F(x) = \int_0^{a-x} f(t)\,dt$.

a) Montrer que F est dérivable sur [0 , a] et déterminer F'(x).

b) Déduire que $\int_0^a f(t)\,dt = \int_0^a f(a-t)\,dt$.

4) Soit n > 1, pour tout k < n on pose

$I_k = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\,dx$ et $I_n = \int_0^1 x^n\,dx$.

a) Calculer $\sum_{k=1}^{n} I_k$.

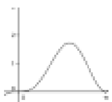
b) Trouver, à l'aide d'une intégration par partie une relation entre I_k et I_{k+1}.

c) Expliciter alors I_k en fonction de n.

5)

1) Calculer le réel $\int_0^{\pi} x\sin^2(x)\,dx$

2) Soit la fonction f définie sur [0, π] [par $f(x) = \sqrt{x}\sin x$ dont la courbe C_f est représentée ci contre dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère le solide



engendré par la rotation autour de l'axe $(O, \vec{i})$ de la surface délimitée dans le plan P par l'axe $(O, \vec{i})$, la droite d'équation x = π et la courbe C_f sachant que l'unité graphique est de 2 cm, calculer le volume V du solide en cm³.

6) Pour tout n entier naturel non nul on note f_n l'application de [0 ; 1] dans ℝ définie par :

$f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$.

1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f_n sur [0, 1].

2) Donner, le tableau de variations de f_n. (on distinguera deux cas : n = 1 et n > 1).

3) On pose $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a) Calculer $I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,dx$.

b) Quel est le sens de variation de I_n ? Montrer que (I_n) est convergente.

c) Montrer que pour tout entier n > 1, on a : $I_n = \frac{2n}{2n+3} I_{n-1}$.

d) Montrer que pour tout n > 1 , on a : $0 < \int_0^1 f_n(x)\,dx \le \frac{1}{1+n}$.

En déduire la limite de I_n.

Exercice 8 :

Soient (u_n) la suite définie sur IN* par : $u_n = \sum_{k=0}^{2n-1} \frac{(-1)^k}{k+1}$

et $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{2n-1} x^{2n-1}$.

1) Montrer que : $\int_0^1 f(x)\,dx = u_n$.

2) Mque pour tout x ≠ -1 on a : $f(x) + \frac{x^{2n}}{1+x} = \frac{1}{1+x}$

3) Déduire que $u_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx = \ln(2)$

4) Montrer que : $0 \le \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1+x}\,dx \le \int_0^1 x^{2n}\,dx$

5) Déduire alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 11 :

On définit la suite (In) par :

$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n t\,dt$

1)a) Calculer I_0 et I_1

b) Mque pour tout ∀ p, $I_p + I_{p+2} = \frac{1}{p+1}$

c)En déduire I_2 et I_3

2)Démontrer que la suite (I_n) est décroissante. En déduire qu'elle est convergente.

3)a)En utilisant 1.(b) et 2., prouver que pour tout entier $n \ge 2$, $\frac{1}{2(n+1)} \le I_n \le \frac{1}{2(n-1)}$

(b) Déterminer les limites des suites (I_n) et $(n\,I_n)$

4)Soit $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a)Montrer par récurrence que pour tout entier $n \ge 0$, $u_n = I_0 + (-1)^n I_{2n+2}$

b) En déduire $\lim u_n$

Exercice 12:

Pour n ∊ IN, la fonction f_n est définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = \dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin x}, & \text{pour } x \neq 0 \\ f_n(0) = 2n+1 \end{cases}$$

Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$

a) Justifier l'existence de I_n.

b) Vérifier que $\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = \frac{\sin(2n-1)x}{\sin x} + 2\cos 2nx$

c) Montrer que $I_n = I_{n-1}$, pour n ≥ 1 d)En déduire la valeur de I_n

Exercice 13 :

1) Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$, continue, positive et décroissante.
Démontrer que pour tout n > 0 ;
$\int_n^{n+1} f(t)dt \le f(n) \le \int_{n-1}^{n} f(t)dt$

2) On pose : $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$ et $I_n = \int_1^n f(t)dt$; n >0

a) Mque $I_{n+1} - I_2 \le u_n - f(1) \le I_n$; pour tout n > 0

b) En déduire que si $(I_n)_{n>0}$ est convergente vers un réel α alors $(u_n)_{n>0}$ est convergente et donner un encadrement de sa limite.

Exercice 14:

Calculer une valeur approchée de $I=\int_0^1 \sqrt{1+t^4}\,dt$ par la méthode des rectangles en partageant l'intervalle [0, 1] en 5 segments de même longueur.

Exercice 15:

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\int_{-1}^{x} \frac{1}{1+t^2}dt$

1)Justifier que f est dérivable sur IR .

2)Déterminer une équation de la tangente à la courbe C de f au point d'abscisse -1.

Exercice 16 :

Soit $f(x) = \int_0^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\,dt$

1°) Vérifier que f est définie sur I = $[0, \pi]$

2°) Montrer que f est dérivable sur I et calculer sa fonction dérivée.

3°)a)Vérifier que $f(x)=-4\int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \sin^2(t)dt$

b)Expliciter f(x)

c)Déduire alors l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $\mathcal{C}$: $y=\sqrt{4-x^2}$ et les droites d'équations :x=0, y=0 et x=1

Exercice 17:

Dans le plan (oxy), on considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :$y=\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}$ avec $x \in [0, 1]$

Par rotation de $\mathcal{C}$ autour de l'axe (ox), on obtient un solide de révolution de volume v

Déterminer le volume de solide S.

Exercice 18 :

1)Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\tan x}\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$

2)Soit $F(x)=\int_0^{\tan x} \frac{1}{1+t^2}dt$ la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

a)Mque F est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ puis calculer F'(x)

b)Expliciter F(x) en fonction de x.

3)On définie la suite u par :

$u_0=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ et $u_n=\int_0^1 \frac{t^{2n}}{1+t^2}dt$; $n\in IN^*$

a)Mque$\forall n$; $0 \le u_n \le \frac{1}{1+2n}$; en déduire $\lim u_n$.

b)Mque $u_{n+1}+u_n = \frac{1}{1+2n}$

3)Soit la suite v définie : $V_n= 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^n}{1+2n}$

Calculer u_{n+1} en fonction de u_0 et v_n, calculer $\lim v_n$.

Exercice 19 : (4 points)

1° a)Vérifier que pour tout $t \in [0,1[$,
$\frac{2}{t^2-1} = \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}$

b) Calculer alors le réel $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{t^2-1}dt$

2° Soit F la fonction définie sur [0,1[par

$F(x) = \int_0^{x^2} \frac{\sqrt{t}}{t-1}dt$

a) M que F est dérivable sur [0,1[et déterminer F ' (x) .

b) En déduire que $F(x) = \int_0^{x} \frac{2t^2}{t^2-1}dt$.

c) Calculer alors $F(\frac{1}{2})$

Exercice 20 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x}{1-x}}$

1) Etudier les variations de f et tracer sa courbe C dans le repère R.

2) a)Montrer que f admet une fonction réciproque g que l'on déterminera.

b)Tracer la courbe C ' de g dans le repère R.

3) Soit A en unité d'aire l'aire du domaine limitée par la courbe C et les droites x=0 et y=1

Montrer que $A=\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^3}dx$

Exercice 21:

Soit u la suite définie sur IN par :

$u_0=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ et pour tout n de IN*, $u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x^2}}dx$

1) a) Montrer que la suite u est décroissante

b) Déduire que la suite u est convergente

2) a) Montrer que pour tout n de IN, on a :
$\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}} \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) Déterminer alors la limite de la suite u .

3) $\forall$ n ≥ 3, o n pose : $I_n = \int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$

a) Vérifier que pour n > 3, on a : $u_n + u_{n-2} = I_n$

b) Montrer alors que $nu_n + (n-1)\,u_{n-2} = \sqrt{2}$; pour n ≥ 3

c) En déduire que $\forall$ n ≥ 3 ; on a :
$(2n-1)u_n \leq \sqrt{2}$

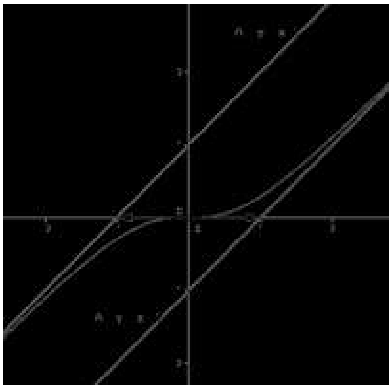
d) Montrer alors que la suite (nu_n) est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 22 : (5 points)

Ci-dessous la représentation graphique d'une fonction f définie sur IR.

1) Donner le tableau de variation de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.



3) Soit un réel λ > 1 et A(λ) l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites : x = 0 et x = λ.

a) Montrer que $\frac{(\lambda-1)^2}{2} \leq A(\lambda) \leq \frac{\lambda^2}{2} + \lambda$.

b) Déterminer $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^2}$.

4) On suppose que $f(x) = ax + \frac{bx}{\sqrt{x^2+1}}$.

a) Montrer que a = 1 et b = -1.

b) Calculer A(λ) en fonction de λ.

c) Retrouver alors $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{A(\lambda)}{\lambda^2}$.

Exercice 23 :

On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\tan x)^n dx$, n ∈ IN*

1)a)Justifier l'existence de I_n. puis calculer I_1 et I_2.

b)Montrer que I_n est une suite décroissante.

c)Déduire que I_n est une suite convergente.

2)a)Montrer que $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$, n ∈ IN*

b)Montrer que $\forall n \in$ IN*; $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

c)En déduire la limite de I_n.

3)On pose $f(n) = I_{n+4} - I_n$

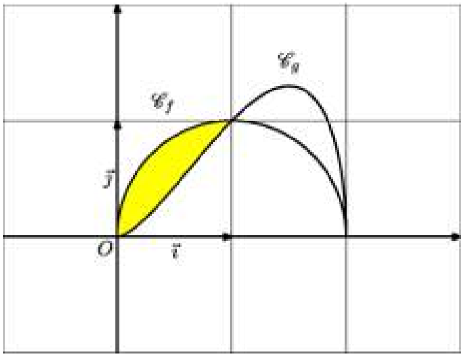
a)Calculer f (n) en fonction de n, n∈IN*

b)Calculer f(2) + f(6) + … +f(4k-2) en fonction de I_2 et de I_{4k+2}.

c)En déduire $\lim\limits_{k \to +\infty} [1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots-\frac{1}{4k-1+} + \frac{1}{4k+1}]$

Exercice 24:(6 points)

Dans le graphique ci-contre, on a tracé, dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ les courbes *Cf* et *Cg* des fonctions *f* et *g* définies sur [0, 2] par :



$f(x) = \sqrt{2x-x^2}$ et $g(x) = x\sqrt{2x-x^2}$.

1) Montrer que la droite Δ: *x* = 1 est un axe de symétrie pour la courbe *Cf*.

2) Calculer l'aire de la partie hachurée sur le graphique.

3) Soit F la primitive de f qui s'annule en 0 et G la fonction définie sur $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ par G(x) = F(1+ sinx).

a) Montrer que *G* est dérivable sur $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ puis calculer G'(x).

b) Calculer $G(\frac{-\pi}{2})$; En déduire que pour tout x de $[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$; on a : $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{\pi}{4}$.

c) Déduire l'aire de la partie du plan limitée par C_f et l'axe des abscisses.

d) Evaluer $\int_0^1 g(x)\,dx$.

4) Soit u la suite définie sur IN* par
$u_n = \int_0^1 x^n\sqrt{2x-x^2}\,dx$.

a) Etudier la monotonie de la suite u.

b) Montrer que pour tout n > 0 ; on a :
$0 < u_n \leq \frac{1}{n+1}$.

c) déduire que la suite est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 25: (6 points)

Soit *f* la fonction définie sur IR_+ par
$f(x) = \int_0^x \frac{t}{1+t^4}dt$

1) a) Montrer que, pour tout réel x ≥ $\sqrt{2}$;

$$\int_{\sqrt{2}}^{x} \frac{t}{1+t^4} dt \leq 1 + \frac{1}{1-x^2}$$

b) Déduire que f est bornée sur $[\sqrt{2}, +\infty[$.

c) Montrer alors que f admet une limite finie L en $+\infty$.

2) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par :

$g(x) = \int_0^{\sqrt{tanx}} \frac{t}{1+t^4} dt$

a) Montrer que la fonction u définie sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ par :

u(x) = $\sqrt{tanx}$ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur IR_+.

b) Justifier que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et déterminer $g'(x)$.

c) Montrer alors que $g(x) = \frac{1}{2}x$, ∀ x de $[0, \frac{\pi}{2}[$.

d) Soit h la fonction définie sur IR par h(x) = $\frac{x}{1+x^4}$.

Déterminer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (H) de la fonction h, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Construire la courbe (C) de f dans un repère orthonormé.

Exercice 26:

On considère la suite définie sur IN*

par : $U_n = \int_1^e \frac{(\ln x)^n}{x^2} dx$.

1) a) Montrer que pour tout n∈IN*, $U_n \geq 0$.

b) Montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

2) a) En intégrant par parties, calculer U_1.

b) Montrer que pour tout n∈IN*,

$U_{n+1} - (n+1)U_n = -\frac{1}{e}$

c) En déduire la valeur de U_2.

3) a) Montrer que pour tout n∈IN* , $0 \leq U_n \leq \frac{1}{ne}$

b) En déduire $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 27

TOUTES LES QUESTIONS SONT INDÉPENDANTES

1) Soit f une fonction dérivable sur [-1, 1] dont la dérivée est continue sur [-1, 1]
et vérifiant f(-1) = - f(1)

Montrer que $\int_{-1}^{1} tf'(t)dt = -\int_{-1}^{1} f(t)dt$

2) f est définie sur]-1, +∞ [par f(x) = $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}}$ et de courbe représentative C dans un repère orthonormé (o, $\vec{i}, \vec{j}$), d'unité de longueur 2 cm
L'aire de la partie(D) du plan limitée par l'axe des abscisses , la courbe (C) et les droites d'équations x = α et x = 0 où -1 < α < 0 et A(α) son aire en cm²

Montrer que A(α) = $\frac{8}{3}\left[1 - \sqrt{1+\alpha^3}\right]$

3) Soit f une fonction continue sur [0, 2] et F une primitive de f sur [0, 2].

a) Montrer que

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) f(1+\sin x)dx$$

b) Déduire I = $\int_0^2 \sqrt{t(2-t)}\, dt$

4) Soit f la fonction définie sur]0, +∞ [par ;

$f(x) = \int_1^x \frac{\sin^2(t)}{t} dt$

a) Etudier le signe de f (x).

b) Montrer que f (2) ≤ ln (2)

5) Pour toute fonction f périodique de période 2, deux fois dérivable sur IR:

Montrer que pour tout α ∈ IR , $\int_{\alpha}^{\alpha+2} f''(x)dx = 0$

6) Soit f la fonction définie sur IR par f(t) = $|t|$.
Soit F la fonction définie sur IR par :

F(x) = $\frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt$

a) Montrer que si x > 1 , F(x) = x

b) Montrer que si $|x| \leq 1$ alors F(x) = $\frac{1}{2}(1 + x^2)$

Exercice 28 : (5 points)

Dans cet exercice, n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1° Soit u la suite définie par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$

a) Montrer que $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) Calculer alors la limite de la suite u.

2° Soit v la suite définie par $v_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{1+k}$

et soit f_n la fonction définie

$f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^{n-1}\, x^{n-1}$

a) Vérifier que $\int_0^1 f_n(x)\,dx = v_n$

b) Montrer que pour tout $x \neq -1$,

$\frac{1}{1+x} - f_n(x) = \frac{(-x)^n}{1+x}$

c) En déduire que $\left|\ln 2 - v_n\right| \leq u_n$.

d) Calculer la limite de la suite v.

Exercice 29 : (6 points)

Le but de l'exercice est de calculer les réels

$A = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, $B = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx$

et $C = \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$

1° Montrer que $B = \frac{1}{3}$.

2° A l'aide d'une intégration par partie,

montrer que $C = \frac{1}{4}$ A.

3° Soit F la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

par $F(x) = \int_0^{\sin x} \sqrt{1-t^2}\,dt$

a) Montrer que F est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

et que $F'(x) = \cos^2 x$.

b) Expliciter alors F (x)

c) En déduire la valeur de A et celle de C.

Exercice 30 :(3 points)

Dans la figure ci – dessous, on a tracé la courbe (C) d'équation $y = \sqrt{x}$ et la courbe (C') de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$.

On pose : $I = \int_0^2 f(x)\,dx$.

1° Interpréter le réel I géométriquement.

2° Prouver alors que $I = 2\int_1^2 f(x)\,dx$.

3° Montrer en exploitant le graphique que

$2 \leq I \leq \frac{8\sqrt{2}-4}{3}$

Exercice 31 ; (6 points)

I/ On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

a)Calculer $\int_{-1}^{2} f(x) \times f'(x)\,dx$

b)Déterminer le signe de $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
f '(x)		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$-\infty$

II/ On donne $I_n = \int_0^1 x^{2n+1}\sin(\pi x)\,dx$ où $n \in \mathbb{N}$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{2n+2}$.

En déduire que la suite (I_n) est convergente et déterminer sa limite.

III/ Soit f une fonction continue sur IR et F une primitive de f sur IR :

On désigne par C et par Γ les courbes représentatives respectivement de f et F dans un repère orthonormé.

Montrer que si le point $I(\frac{1}{2}, 0)$ est un centre de symétrie de la courbe Γ alors la courbe C admet un axe de symétrie que l'on précisera.

IV Déterminer une primitive de la fonction f définie sur] 0, 2 [par $f(x) = \frac{1}{x^2}\sqrt{\frac{x}{2-x}}$

Exercice 32:

A)Soit $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$

1)En intégrant par parties, montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a : $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. (1)

2)Calculer I_0 et I_1 et prouver par récurrence que :

$I_{2n} = \frac{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}{2\times4\times6\times\ldots\times2n}\times\frac{\pi}{2}$, pour $n \geq 1$;

$I_{2n+1} = \frac{2\times4\times6\times\ldots\times2n}{1\times3\times5\times\ldots\times(2n-1)}\times\frac{1}{(2n+1)}$, pour $n \geq 0$.

3)a)En revenant à la définition de I_n sous forme d'intégrale, montrer que la suite I_n est décroissante.

b)En déduire, à l'aide de (1), que : $\frac{n-1}{n} I_{n-1} \leq I_n \leq I_{n-1}$.

c)Montrer alors que $\lim_{n\to+\infty} \frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = 1$.