Integrale

Intégrales

Prof: Mr Ben Brahim. M . H
Lycée Pilote Nabeul — Série d'exercices N°16 — $4^{ème}$Math

Exercice 1 : Calculer :

$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2 t}dt$,J= $\int_1^{2}(tg^2x+tg^3x)dx$, K= $\int_0^{6}|x-4|dx$,L= $\int_1^2\frac{x}{(x+1)^3}dx$;T= $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^9(x)dx$ M= $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(t\sin x)dt$

Exercice 2 : On pose I = $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\cos^2 x\,dx$ et J= $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(2x+1)\sin^2 x\,dx$

1) Calculer I+J 2) Calculer à l'aide d'une intégration partie I - J 3) En déduire les valeurs de I et J.

Exercice 3 : Pour tout n∈IN* , on pose $I_n = \int_0^1\frac{x^n}{1+x^2}dx$

1) Montrer que pour tout n ∈IN*, $\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}$ et déduire lim I_n en +∞

2) Montrer que pour tout n ∈IN*,on a $I_{n+2}=\frac{1}{n+1}-I_n$

Exercice 4 : Soit f une fonction continue sur IR.

Soit la suite U définie sur IN par $U_n=\int_1^n f^2(t)dt$ montrer que U est croissante.

Exercice 5: Soit la suite $U_n=\int_n^{n+1}f(x)dx$ avec f une fonction décroissante sur IR

Montrer que la suite U est décroissante

Exercice 6 : Soit la suite I définie sur IN par $I_0=\int_0^1\sqrt{1+t}\,dt$ et $I_n=\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$ (n∈IN*)

1) Calculer I_0 . 2) Montrer que I est décroissante et quelle est convergente.

3) Montrer que ∀ n∈IN* $\frac{1}{n+1}\le I_n\le\frac{\sqrt{2}}{n+1}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

4) Montrer à l'aide d'une intégration par partie que $I_{n+1}=\frac{4\sqrt{2}}{5+2n}-\frac{2n+2}{5+2n}I_n$

5) Calculer alors J = $J=\int_0^1\left(1+5t+9t^2\right)\sqrt{1+t}\,dt$

Exercice 7 : Soit la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $U_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n t\,dt$.

1) Calculer U_0,U_1,U_2 .

2) Montrer, à l'aide d'une intégration par partie que : $U_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}U_n$.

3) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}, U_{2n}=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\cdot\frac{\pi}{2^{2n+1}}$

4) a) Montrer que $(n+1)U_{n+1}.U_n$ est indépendant de n. b) Calculer alors U_{2n+1} .

Exercice 8 : Soit la suite U définie sur IN par $U_n=\int_0^1\frac{(-1)^n t^n}{(1+t)^2}dt$ montrer que $|U_n|\le\frac{1}{2}$

Exercice 9 : Soit la suite U définie par $U_0=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin(\pi t)dt$ et $U_n=\int_0^{\frac{1}{2}}t^n\sin(\pi t)dt$ pour n ≥ 1

Montrer que ∀ n ≥ 1 on a $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\sin(\pi t)}{1-t}dt=U_0+U_1+U_2+...+U_{n-1}+\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{t^n\sin(\pi t)}{1-t}dt$

Exercice 10 : Soit $F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2}$ dt $\quad x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

1) Monter que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ on a $F(x) = x$. 2) Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

Exercice 11 :

1) Soit $U(x) = 2\sin x - 1$ définie sur $I =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Etudier le sens de variation de U sur I et montrer que $U(I) =]-3, 1[$.

2) Soit $F(x) = \int_0^{U(x)} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$ où $x \in I$.

a) Justifier l'existence de F sur I.

b) Montrer que F est dérivable sur I et calculer $F'(x)$ pour $x \in I$ puis calculer $F(\frac{\pi}{6})$.

c) En déduire que $\forall x \in I'$; $F(x) = x - \frac{\pi}{6}$

3) Soit $K = \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{\sqrt{3-2t-t^2}}$ .En déduire la valeur de K.

Exercice 12: Soit f la fonction définie sur $[0,\pi]$, par $f(x) = \sin^2 x$.

1) Etudier f et tracer C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) Calculer l'aire du domaine: $D = \{M(x,y) \in P ; 0 \le x \le \pi \text{ et } 0 \le y \le f(x)\}$.

3) Déterminer le volume du solide de revolution engendré par la rotation de C autour de l'axe $(O,\vec{i})$.

Exercice 13 : Soit la fonction f définie sur $[-1,3]$ par $f(x)=\frac{1}{2}\sqrt{-x^2+2x+3}$

On désigne par Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de Cf.
b) Compléter l'étude de F et tracer sa courbe Cf.

2) On considère la fonction g définie sur $[0,\pi]$ par $g(x) = \int_1^{1+2\cos x} f(t)dt$

a) Montrer que g est dérivable sur $[0,\pi]$ et calculer g'(x).

b) En déduire que pour tout $x \in [0,\pi]$ on a : $g(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) - x + \frac{\pi}{2}$

c) Calculer l'aire A de la courbe limitée par Cf et l'axe des abscisses.

3) Déterminer le volume du solide de révolution engendré par la rotation de Cf autour de $(O,\vec{i})$.

Exercice 14 :I. Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$

1) Etudier et représenter graphiquement f dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm)

2) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par Cf l'axe $(O,\vec{i})$ et les droites d'équations x=0 et x=1.

Utiliser la méthode des rectangles en partageant l'intervalle $[0,1]$ en cinq intervalles d'amplitude 0,2

Pour donner un encadrement de $\mathscr{A}$.

Exercice 15: Soit la fonction f est définie sur IR par $f(x) = x^3 + x + 1$

1/ Etudier f et tracer Cf dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$ (on précisera la tangente à Cf au point d'abscisse 0

2/ Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par Cf, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$

3/ Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J que l'on précisera et tracer Cg

4/ En déduire $\int_1^3 g(x)dx$.

Série d'exercice N°6 ①

Exercice n°1

- $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 t}\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x}\, dx$

$= [\tan x]_0^{\frac{\pi}{4}} = F(\frac{\pi}{4}) - F(0) = 1$

- $J = \int_1^2 (\tan^3 x + \tan x)\, dx = \int_1^2 \left(\tan x\, [1 + \tan^2 x]\right) dx$

$h \cdot h' \longrightarrow \frac{h^2}{2}$

$= [\frac{1}{2} \tan^2 x]_1^2 = \frac{1}{2} [\tan^2(x)]_1^2 = \frac{1}{2} \left(\tan^2(2) - \tan^2(1)\right)$

- $K = \int_0^6 |x-4|\, dx = \int_0^4 \underbrace{|x-4|}_{\leq 0} dx + \int_4^6 \underbrace{|x-4|}_{\geq 0} dx$

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

$= \int_0^4 (-x+4)\, dx + \int_4^6 (x-4)\, dx$

$= \left[-\frac{1}{2}x^2 + 4x\right]_0^4 + \left[\frac{1}{2}x^2 - 4x\right]_4^6$

$= [8 - 0] + [(-6) - (-8)] = 10$

math-pilote.blogspot.com

- $L = \int_1^2 \frac{x}{(x+1)^3}\, dx = \int_1^2 \frac{(x+1)-1}{(x+1)^3}$

$= \int_1^2 \frac{x+1}{(x+1)^3} dx - \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^3} dx = \int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2} dx - \int_1^2 1(x+1)^{-3}\, dx$

$=$

$\frac{h'}{h^2} \to \frac{-1}{h}$ $\qquad h' h^{-3} \longrightarrow \frac{1}{2} h^{-2}$

$= \left[\frac{-1}{(x+1)}\right]_1^2 - \left[\frac{-1}{2}(x+1)^{-2}\right]_1^2$

$= -\left[\frac{1}{x+1}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(x+1)^2}\right]_1^2$

$= \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4}\right)$

$= \left(-\frac{1}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{36} - \frac{9}{36}\right)$

- $T = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 x\, dx = 0$ car la fct $x \longrightarrow \sin^9 x$ est impaire sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$

$f(-x) = (\sin(-x))^9 = (-\sin x)^9 = -\sin^9 x = -f(x)$

- $M = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t \underbrace{\sin x}_{cte})\, dt = \sin x \int_0^{\pi/2} t\, dt$

$= \sin x \left[\frac{1}{2} t^2\right]_0^{\pi/2}$

π^2

Exercice n°2:

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x \, dx$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2 x \, dx$

1) $I+J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2 x \, dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) \underbrace{(\cos^2 x + \sin^2 x)}_{1} dx$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) \, dx$

$= \left[x^2 + x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4}$

2) $I - J = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)(\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx$ $\qquad \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos 2x \, dx$

On a : $U(x) = 2x+1 \longrightarrow U'(x) = 2$

$V'(x) = \cos 2x \longrightarrow V(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$

$\left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} U(x) \cdot V'(x) \, dx = \left[U(x) \cdot V(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} U'(x) \cdot V(x) \, dx \right)$

$\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1) \cdot \cos 2x \, dx = \left[(2x+1)\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x \, dx$

$I - J = \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4} + 1 - 0\right] - \left[\frac{-1}{2}\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$\Rightarrow I - J = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left[\cos 2x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(0-1)$

$= \frac{\pi}{4}$

2) $\begin{cases} I + J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi}{4} \\ I - J = \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Exercice n°3.

on a $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$; $n \in \mathbb{N}^*$

1) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$?

- Pour $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq 1+x^2 \leq 2$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1$

or $x^n \geq 0$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x^n \leq \frac{x^n}{1+x^2} \leq x^n$

Les fcts $x \mapsto \frac{1}{2}x^n$; $x \mapsto \frac{x^n}{1+x^2}$; x^n sont continue sur $[0;1]$ et $1 > 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{2}x^n\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx \leq \int_0^1 x^n\,dx$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

$\Rightarrow \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$

on a : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} I_n = 0$

2) $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+2} = \frac{1}{n+1} - I_n$?

$I_{n+2} = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{x^n \cdot x^2}{1+x^2}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^n[1+x^2]-1}{1+x^2}\,dx$

$= \int_0^1 \left(x^n - \frac{x^n}{1+x^2}\right)dx$

$= \int_0^1 x^n\,dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$

$= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 - I_n$

$= \frac{1}{n+1} - I_n$

2ème méthode :

$I_{n+2} + I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+2}}{1+x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{x^{n+2}+x^n}{1+x^2}\,dx$

$= \int_0^1 \frac{(1+x^2)\,x^n}{1+x^2}\,dx$

$= \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1$

$= \frac{1}{n+1}$.

Exercice n°4 :

$$u_n = \int_1^n f^2(t)\, dt$$

* $u_{n+1} - u_n = \int_1^{n+1} f^2(t)\, dt - \int_1^n f^2(t)\, dt$

$$= \int_1^n \cancel{f^2(t)\, dt} + \int_n^{n+1} f^2(t)\, dt - \int_1^n \cancel{f^2(t)}\, dt$$

$$= \int_n^{n+1} f^2(t)\, dt$$

On a $n+1 > n$ et $\forall t \in [n ; n+1]$ $f^2(t) \geq 0$

alors $\int_n^{n+1} f^2(t)\, dt \geq 0$

$\Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$

$\Rightarrow u_n$ est croissante.

Exercice n°5.

$u_n = \int_n^{n+1} f(x)\, dx$; f une fonction décroissante sur $\mathbb{R}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$:

Pour $n \leq x \leq n+1$: $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$ car f est $\searrow$ sur $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \int_n^{n+1} f(n+1)\, d(x) \leq \int_n^{n+1} f(x)\, dx \leq \int_n^{n+1} f(n)\, dx$$

$$\Leftrightarrow [(n+1)-n]\, f(n+1) \leq u_n \leq [(n+1)-n]\, f(n)$$

$$\Rightarrow f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$$

d'où $f(n+2) \leq u_{n+1} \leq f(n+1)$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$$

Exercice n°6.

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt \quad ; \quad I_n = \int_0^1 t^n \sqrt{1-t}\,dt$$

1/ $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$

$= \left[\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}\right]_0^1$

$= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4\sqrt{2}-2}{3} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{3}$

2/ $\forall n \in \mathbb{N} ; I_{n+1} - I_n \leq 0$?

* on a : $I_1 - I_0 = \int_0^1 t\sqrt{1+t}\,dt - \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt$

$= \int_0^1 t\sqrt{1+t} - \sqrt{1+t}\,dt \leq 0$

$= \int_0^1 (t-1)\sqrt{1+t}\,dt \leq 0$

car $1>0$; $\forall t \in [0;1]$; $(t-1)\sqrt{1+t} \leq 0$.

* $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t}\,dt - \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt$

$= \int_0^1 \left(t^{n+1}\sqrt{1+t} - \sqrt{1+t}\right)dt$

$= \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,(t-1)\,dt \leq 0$

car $1>0$; $\forall t \in [0;1]$; $\underbrace{t^n}_{\geq 0}\underbrace{\sqrt{1+t}}_{\geq 0}\underbrace{(t-1)}_{\leq 0} \leq 0$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}$; $I_{n+1} - I_n \leq 0$

$\Rightarrow (I_n)$ est décroissante.

3) on a : $I_0 = \int_0^1 \sqrt{1+t}\,dt \geq 0$; car $\forall t \in [0;1]$; $\sqrt{1+t} \geq 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$; $I_n = \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\,dt \geq 0$ car $\forall t \in [0;1]$, $t^n\sqrt{1+t} \geq 0$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}$; $I_n \geq 0$

$\Rightarrow (I_n)$ est minorée par 0

$\Rightarrow (I_n)$ est convergente.

3/ $\forall n \in \mathbb{N}^* ; \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$?

Soit $n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+t \leq 2$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow t^n \leq t^n\sqrt{1+t} \leq \sqrt{2}\, t^n \quad \text{or } t^n \geq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 t^n dt \leq \int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\, dt \leq \int_0^1 \sqrt{2}\, t^n\, dt$$

$$\Rightarrow \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 \leq I_n \leq \sqrt{2}\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{2}}{n+1}$$

or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2}}{n+1} = 0$

alors $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$

4/ $\forall n \in \mathbb{N} ; I_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t}\, dt$

on pose :

$$u(t) = t^{n+1} \longrightarrow u'(t) = (n+1)t^n$$

$$v'(t) = \sqrt{1+t} \longrightarrow v(t) = \frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{2}{3}\left[(1+t)\, t^{n+1}\sqrt{1+t}\right]_0^1 - \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 t^n (1+t)\sqrt{1+t}\, dt$$

$$= \frac{2}{3}\left[\frac{2\sqrt{2}}{3} - 0\right] - \frac{2}{3}(n+1)\int_0^1 \left(t^n\sqrt{1+t} + t^{n+1}\sqrt{1+t}\right) dt$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)\left(\int_0^1 t^n\sqrt{1+t}\, dt + \int_0^1 t^{n+1}\sqrt{1+t}\, dt\right)$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}(n+1)\left(I_n + I_{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow 3 I_{n+1} = 4\sqrt{2} - 2(n+1)(I_n + I_{n+1})$$

$$\Rightarrow (2n+5) I_{n+1} = 4\sqrt{2} - 2(n+1) I_n$$

$$\Rightarrow I_{n+1} = \frac{4\sqrt{2}}{2n+5} - \frac{2n+2}{2n+5} I_n$$

5) $J = \int_0^1 (1+5t+9t^2)\sqrt{1+t}\, dt$

$= \int_0^1 \sqrt{1+t}\, dt + 5\int_0^1 t\sqrt{1+t}\, dt + 9\int_0^1 t^2\sqrt{1+t}\, dt$

$= I_0 + 5I_1 + 9I_2$

or $\begin{cases} I_1 = \dfrac{4\sqrt{2}}{5} - \dfrac{2}{5} I_0 \\ I_2 = \dfrac{4\sqrt{2}}{7} - \dfrac{4}{7} I_1 \end{cases}$

$\Rightarrow J = I_0 + 5\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{5} - \dfrac{2}{5} I_0\right) + 9\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{7} - \dfrac{4}{7} I_1\right)$

$= I_0 + 5\left(4\sqrt{2} - 2I_0\right) + 9\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{7} - \dfrac{4}{7} I_1\right)$

$= 20\sqrt{2} - 9I_0 + 9\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{7} - \dfrac{4}{7}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{5} - \dfrac{2}{5} I_0\right)\right)$

$= 20\sqrt{2} - 9I_0 + \dfrac{36\sqrt{2}}{7} - \dfrac{36}{7}\left(\dfrac{4\sqrt{2}}{5} - \dfrac{2}{5} I_0\right)$

$= 20\sqrt{2} - 9I_0 + \dfrac{36\sqrt{2}}{7} - \dfrac{144\sqrt{2}}{35} + \dfrac{72}{35} I_0$

$= \dfrac{700\sqrt{2}}{35} + \dfrac{180\sqrt{2}}{35} - \dfrac{144\sqrt{2}}{35} + \dfrac{(72-315)}{35} I_0$

$= \dfrac{736\sqrt{2}}{35} - \dfrac{243}{35} I_0$

$= \dfrac{736\sqrt{2} - 243 I_0}{35}$

Suite série n°16 ①

Exercice 7

$$u_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$

1) $u_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}(1-0) = \frac{\pi}{2}$

$u_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$

$u_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt$

$= \left[\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$= \frac{\pi}{4}$

2) $u_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt$

$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos^{n+1} t \, dt$

on pose $\begin{cases} u(t) = \cos^{n+1} t & \longrightarrow u'(t) = (n+1)(-\sin t)\cos^n t \\ v'(t) = \cos t & \longrightarrow v(t) = \sin t \end{cases}$

$\Rightarrow u_{n+2} = \left[\cos^{n+1} t \sin t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos^n t \, dt$

$= 0 + (n+1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 t)\cos^n t \, dt$

$= (n+1)\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt\right)$

$\Rightarrow u_{n+2} = (n+1)(u_n - u_{n+2})$

$\Leftrightarrow u_{n+2} + (n+1)u_{n+2} = (n+1)u_n$

$u_{n+2}(n+2) = (n+1)u_n$

$\Rightarrow u_{n+2} = \frac{(n+1)}{(n+2)} u_n$

3/ pour $n=0$; $\mathcal{U}_0 = \frac{(2\times 0)!}{(0!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2\times 0+1}}$

$\frac{\pi}{2}$ $\quad$ $\frac{\pi}{2}$

alors P est vraie pour $n=0$.

Supposons que $\mathcal{U}_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+1}}$

~~on a~~ ~~$\mathcal{U}_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \mathcal{U}_n$~~ M.q. que $\mathcal{U}_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+3}}$?

$= \cancel{\frac{n+1}{n+2}} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

on a d'après 2/

$\mathcal{U}_{2n+2} = \frac{(2n+1)}{2n+2} \mathcal{U}_{2n}$

$= \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+1}}$

$= \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(2n+2)(2n+2)(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+1}}$

$= \frac{(2n+2)!}{2^2 (n+1)^2 (n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+3}}$

$= \frac{(2n+2)!}{((n+1)\, n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+3}}$

$= \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+3}}$

d'après le raisonnement de récurrence

P est vraie pour $n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \mathcal{U}_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+1}}$

4) a) $V_n = (n+1)\, U_{n+1}\, U_n$ est constante ?

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$V_{n+1} = (n+2)\, u_{n+2}\, u_{n+1}$$

$$= \cancel{(n+2)}\left(\frac{n+1}{\cancel{n+2}} u_n\right) u_{n+1}$$

$$= (n+1)\, u_{n+1}\, u_n$$

$$= V_n$$

d'où (V_n) est constante.

on a : $V_0 = u_1 \times u_0 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ;\ V_n = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} ;\ (n+1)\, u_{n+1}\, u_n = \frac{\pi}{2}$.

alors (V_n) est indépendant de n

b) d'après 4) a) on a : $(2n+1)\, u_{2n+1}\, u_{2n} = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \cdot \frac{1}{u_{2n}}$$

$$u_{2n+1} = \frac{\pi}{2(2n+1)} \cdot \frac{(n!)^2\, 2^{2n+1}}{\pi\,(2n)!}$$

Exercice n°8 :

$$u_n = \int_0^1 \frac{(-1)^n t^n}{(1+t)^2}\, dt$$

on a $|u_n| = \left|\int_0^1 \frac{(-1)^n t^n}{(1+t)^2} dt\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{(-1)^n t^n}{(1+t)^2}\right| dt$

$$\leq \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2}\, dt$$

or pour $0 \leq t \leq 1$

$\Leftrightarrow 0 \leq t^n \leq 1$

$\Rightarrow \frac{t^n}{(1+t)^2} \leq \frac{1}{(1+t)^2}$

$$\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{(1+t)^2}\, dt$$

$$\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2} dt \leq \left[-\frac{1}{1+t}\right]_0^1 = -\left[\frac{1}{2} - 1\right]$$

$$|u_n| \leq \int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)^2} dt \leq \frac{1}{2}$$

Exercice n°9

$$\begin{cases} u_0 = \int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t)\,dt \\ u_n = \int_0^{\frac{1}{2}} t^n \sin(\pi t)\,dt \quad \text{pour } n \geq 1 \end{cases}$$

on a: $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t}\,dt =$

$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin(\pi t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} t \sin(\pi t)\,dt + \dots + \int_0^{\frac{1}{2}} t^{n-1} \sin(\pi t)\,dt + \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t}$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sin(\pi t) + \sin(\pi t)\, t + \sin(\pi t)\, t^2 + \dots + \sin(\pi t)\, t^{n-1} + \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \right) dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\sin(\pi t)\left(1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1}\right) + \frac{t^n \sin(\pi t)}{1-t} \right] dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\sin(\pi t)\, \frac{1-t^n}{1-t} + \frac{t^n \sin \pi t}{1-t} \right) dt$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin(\pi t)}{1-t}\,dt$

Exercice n°10 :

$F(x) = \int_0^{\tan x} \frac{dt}{1+t^2} \quad , \; x \in [0; \frac{\pi}{2}[$

1) $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[\; ; \; F(x) = x$?

- la fct tan est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$
- la fct $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $\tan([0; \frac{\pi}{2}[)$

alors F est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}[$

$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[\; ; \; F'(x) = (\tan x)' \, f(\tan x)$

$= (1 + \tan^2 x) \cdot \frac{1}{1+\tan^2 x}$

$= 1$

alors $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[\; ; \; F(x) = x + k$

or $F(0) = \int_0^{\tan 0} f(t)\,dt = 0 \Rightarrow 0 + k = 0 \Rightarrow \underline{k = 0}$

conclusion : $\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[\; ; \; F(x) = x$

2) $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{\tan(\frac{\pi}{4})} \frac{1}{1+t^2}\,dt = F(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$

Exercice n°11.

$u(x) = 2\sin(x) - 1$; $I =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

1) on a u est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$; $u'(x) = 2\cos x > 0$

on a u est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

alors $u\left(]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[\right) =]\lim\limits_{(-\frac{\pi}{2})^+} u(x) ; \lim\limits_{(\frac{\pi}{2})^-} u(x)[=]-3;1[$

2) $F(x) = \int_0^{u(x)} \frac{1}{\sqrt{3-2t-t^2}}\,dt$ où $x \in I$,

a) - La fct u est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

- la fct $t \longmapsto 3-2t-t^2$ continue et positive sur $[-3;1]$

alors $t \longmapsto \sqrt{3-2t-t^2}$ continue sur $[-3;1]$

de plus elle ne s'annule pas sur $]-3;1[$

alors $f(t) = \frac{1}{\sqrt{3-2t-t^2}}$ est continue sur $]-3;1[$

alors F est définie dérivable sur $I =]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$

$\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$; $F'(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$

$$= 2\cos x \cdot \frac{1}{\sqrt{3-2u(x)-u^2(x)}}$$

$$= \frac{2\cos x}{\sqrt{3-2(2\sin x-1)-(4\sin^2 x-4\sin x+1)}}$$

$$= \frac{2\cos x}{\sqrt{-4\sin^2 x+4}}$$

$$= \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{\cos x}{\sqrt{\cos^2 x}} = \frac{\cos x}{\underbrace{|\cos x|}_{>0}} = \frac{\cos x}{\cos x} = 1$$

c) on a $\forall x \in]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$; $F'(x) = 1$

$\Rightarrow F(x) = x + k$, $k \in \mathbb{R}$

or $F(\frac{\pi}{6}) = \int_0^0 f(t)\,dt = 0 \Rightarrow \frac{\pi}{6} + k = 0$

$\Rightarrow k = -\pi$ [illegible]

3) $K = \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} \frac{dt}{\sqrt{3-2t+t^2}}$

$K = \int_{-1}^{\sqrt{3}-1} f(t)\,dt = \int_{-1}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{\sqrt{3}-1} f(t)\,dt$

$= \int_{0}^{\sqrt{3}-1} f(t)\,dt - \int_{0}^{-1} f(t)\,dt$

$= \int_{0}^{u(\frac{\pi}{3})} f(t)\,dt - \int_{0}^{u(0)} f(t)\,dt$

$= F\left(\frac{\pi}{3}\right) - F(0)$

$= \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) - \left(0 - \frac{\pi}{6}\right)$

$= \frac{\pi}{3}$

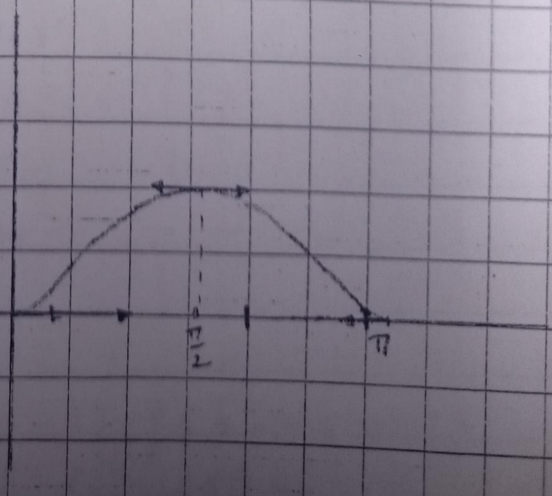
Ex 12 :

$f(x) = \sin^2 x \quad ; \quad x \in [0;\pi]$

f est dérivable sur $[0;\pi]$

$\forall x \in [0;\pi]$; $f'(x) = 2\underbrace{\sin x}_{\geq 0} \cos x$

x	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



2) $D = \{ M(x,y) \in P ;\ 0 \leq x \leq \pi \text{ et } 0 \leq y \leq f(x) \}$

$A = \int_0^{\pi} |f(x)|\, dx \quad u.A$

$= \int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx \quad u.A$

$= \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx \quad u.A$

$= \int_0^{\pi} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right) dx \quad u.A$

$= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi} \quad u.A$

$= \frac{\pi}{2} \quad u.A$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

3) $V = \pi \int_0^{\pi} f^2(x)\, dx$

$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$

$= \pi \int_0^{\pi} \sin^4 x\, dx$

on a $\sin^4 x = (\sin^2 x)^2 = \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2$

$= \frac{1}{4}(1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)$

$= \frac{1}{4}\left(1 - 2\cos 2x + \frac{1-\cos 4x}{2}\right)$

$= \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x$

$V = \pi \int_0^{\pi} \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{8}\cos 4x\, dx$

$= \pi \left[\frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x\right]_0^{\pi}$

$= \frac{3\pi^2}{8}$

Ex 14 p:

$f(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2}$; $x \in \mathbb{R}$

f dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = \frac{-2x(1+x^2) - 2x(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

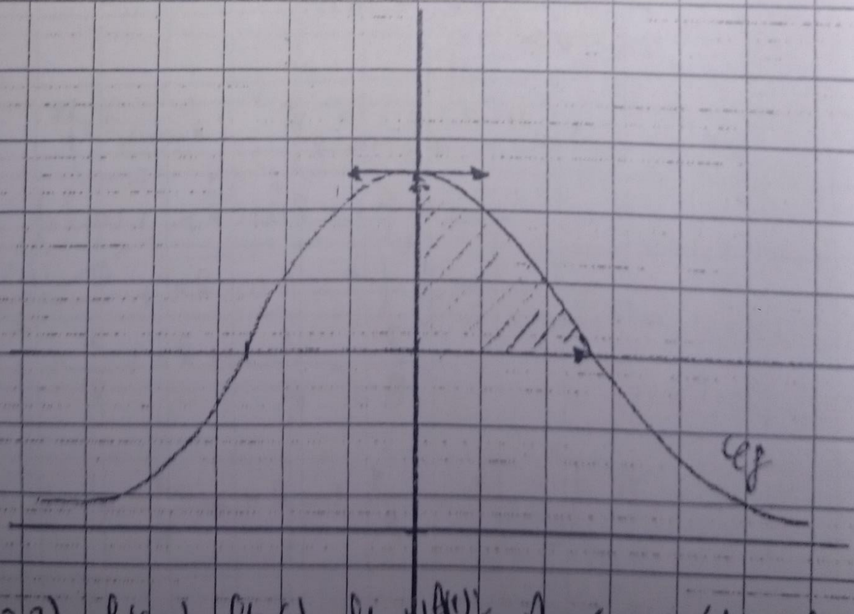
$= \frac{-2x - \cancel{2x^3} - 2x + \cancel{2x^3}}{(1+x^2)^2}$

$= \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \leq 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \lim_{|x| \to +\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$

- La droite d'équation $y = -1$ est A.H à C_f au voisinage $\pm\infty$



4.A

2) $0,2\,(f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) + f(1)) \leq A \leq 0,2\,(f(0) + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + \dots$

Exercice n°15

1/ $f(x) = x^3 + x + 1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\forall x \in \mathbb{R}$; $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$

$\Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2+1 = 0$

$x^2 = \frac{-1}{3}$ imp

x	$-\infty$ $\quad\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

$D : x = a$

Mq $\forall x \in D_f$ on a $\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

$I(a, b)$

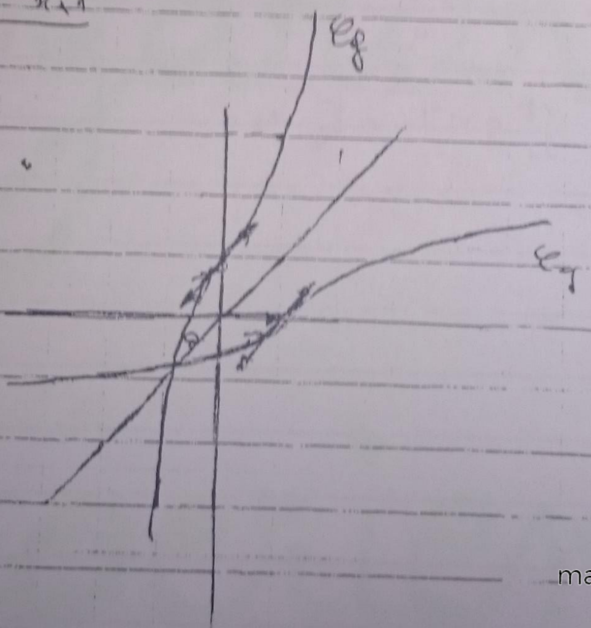
Mq, $\forall x \in D_f$ on a $\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\Rightarrow \mathcal{C}_f$ admet au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ deux B.P de dir $(O, \vec{j})$

$T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = x + 1$



2) $\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)|\, dx \quad (u.a)$

$= \int_0^1 (x^3 + x + 1)\, dx$

$= \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}x^2 + x\right]_0^1$

$= \frac{7}{4}\ (u.a)$

3) f continue et strictement $\nearrow$ sur $\mathbb{R}$

donc f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

d'où f admet une fonction réciproque g.

$\mathcal{C}_g = S_\Delta(\mathcal{C}_f)$

4) $\int_1^3 g(x)\,dx = \mathcal{A}$ u.a avec $\mathcal{A}$ l'aire de la partie limitée par $\mathcal{C}_g$, (Δ), et les droites d'éq $x=1$ et $x=3$.

or $\mathcal{A} = \int_0^1 (3 - f(x))\,dx$ u.a

$= \int_0^1 3\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$ u.a

$= (3 - \frac{7}{4})$ u.a

$= \frac{5}{4}$

$\int_1^3 g(x)\,dx = \frac{5}{4}$ u.a.