| Lycée pilote de Bizerte | Serie d'exercices n°23<br>4éme Math | Prof:M.Benali |
|---|---|---|

**EXERCICE n°1:** Calculer les intégrales suivantes

a) $\int_0^1 \frac{X}{(2X^2+1)^2}\,dX$ b) $\int_0^1 \frac{X}{\sqrt{X+1}}\,dX$ c) $\int_{-1}^{1} \frac{X+1}{\sqrt{X^2+2X+5}}\,dX$

d) $\int_{-2}^{2} X|X-1|\,dX$ e) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 X\,dX$ f) $\int_0^1 \sqrt{X+1}\,dX$

**EXERCICE n°2:** On pose $I_n = \int_0^1 \frac{X^n}{\sqrt{3+X^2}}\,dX$ pour tout $n \in IN^*$

1°) a) Calculer $I_1$

b) Calculer $3I_1+I_3$ et déduire $I_3$

2°) Montrer que $(I_n)$ est décroissante et qu'elle est convergente

3°) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{\sqrt{3}}{3(n+1)}$

b) Calculer $\lim I_n$

**EXERCICE n°3:** On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n X\,dX$ pour tout $n \in IN^*$

1°) a) Justifier l'existance de $(I_n)$

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $I_n > 0$

c) Montrer que $(I_n)$ est décroissante et qu'elle est convergente

2°) a) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$

b) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $\frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$. Déduire $\lim I_n$

3°) Calculer $I_2$ et déduire $I_4$

**EXERCICE n°4:** On pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} X^n \cos X\,dX$ pour tout $n \in IN^*$

1°) En utilisant une intégration par partie, calculer $I_1$

2°) Montrer que $(I_n)$ est décroissante et qu'elle est convergente

3°) Montrer que pour tout $n \in IN^*$ $I_n \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{\pi}{6}\right)^{n+1}$. Déduire $\lim I_n$

4°) En utilisant une double intégration par partie calculer $I_3$

# Série n° 23

## Ex 1

a/ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(2x^2+1)^2}dx$

$$\int_0^1 \frac{x}{(2x^2+1)^2}dx = \frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{1}{2x^2+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{6}.$$

b/ $$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx = \int_0^1\left(\sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)dx$$
$$= \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1} - 2\sqrt{x+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} - 2\sqrt{2} - \frac{2}{3} + 2.$$
$$= \frac{4-2\sqrt{2}}{3}.$$

c/ $$\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx = \int_{-1}^1 \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x+5}}dx$$
$$= \left[\sqrt{x^2+2x+5}\right]_{-1}^1$$
$$= \sqrt{8} - 2$$
$$= 2\sqrt{2} - 2.$$

d/ $$\int_{-2}^2 (x\cdot|x-1|)\,dx = \int_{-2}^1 [x(1-x)]dx + \int_1^2 x(x-1)dx$$
$$= \int_{-2}^1 (x-x^2)dx + \int_1^2 x^2-x\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_{-2}^1 + \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2\right]_1^2$$
$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{4}{2} + \frac{8}{3}\right) + \left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)$$
$$= 1 - \frac{2}{3} - 4$$
$$= -\frac{11}{3}.$$

e/ $$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 x\,dx = 2\int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2x}{2}dx$$
$$= \int_0^{\pi} 1-\cos 2x\,dx$$
$$= \left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi}$$
$$= \pi$$

f/ $$\int_0^1 \sqrt{x+1}\,dx = \left[\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}\right]_0^1$$
$$= \frac{4\sqrt{2}}{3} - \frac{2}{3}$$

## Ex 2

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{3+x^2}}dx$, $n\in\mathbb{N}^*$.

1/ a/ $$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{3+x^2}}dx$$
$$= \left[\sqrt{3+x^2}\right]_0^1$$
$$= 2 - \sqrt{3}.$$

b/ $$3I_1 + I_3 = 3\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{3+x^2}}dx + \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{3+x^2}}dx$$
$$= \int_0^1 \frac{x(3+x^2)}{\sqrt{3+x^2}}dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2x\cdot\sqrt{3+x^2}\,dx.$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\cdot(3+x^2)\cdot\sqrt{3+x^2}\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{3}\cdot 4\cdot 2 - \sqrt{3}.$$
$$= \frac{8-3\sqrt{3}}{3}$$

On a $3I_1 + I_3 = \frac{8}{3} - \sqrt{3}$
$$I_3 = \frac{8}{3} - \sqrt{3} - 3I_1$$
$$= \frac{8}{3} - \sqrt{3} - \frac{18}{3} + 3\sqrt{3}$$
$$= 2\sqrt{3} - \frac{10}{3}.$$

2/ On a : $$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{\sqrt{3+x^2}}dx.$$
$$= \int_0^1 \frac{x^n\cdot(x-1)}{\sqrt{3+x^2}}dx.$$

pour tout $x\in[0,1]$, $n\in\mathbb{N}^*$,
$x^n \geq 0$ ; $x-1 \leq 0$ et $0 < 1$ $\left.\right\}$ $\dfrac{x^n(x-1)}{\sqrt{3+x^2}} \leq 0$ $\left.\right\}$ $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{\ldots}$

$\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{x^n}{\sqrt{3+x^2}} \geq 0$ et $0<1$

alors $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{3+x^2}} \geq 0$

ssi $I_n \geq 0$.

$I_n$ est minorée et décroissante. donc elle est convergente.

3/a/ $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$

ssi $\sqrt{3} \leq \sqrt{x^2+3} \leq 2$

ssi $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x^2+3}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x^n \geq 0$

donc $\dfrac{x^n}{2} \leq \dfrac{x^n}{\sqrt{x^2+3}} \leq \dfrac{x^n}{\sqrt{3}}$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{2}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+3}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{3}}\,dx$

donc $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}(n+1)}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$

c/ Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{3}(n+1)} = 0$

alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

**Ex 3**

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1/a/ La fonction $x \mapsto \tan x$ continue sur $[0,\frac{\pi}{4}]$.

" " $x \mapsto \tan^n x$ " " ".

D'où on peut intégrer $\tan^n x$ entre $0$ et $\frac{\pi}{4}$.

" l'existence de $I_n$.

b/ pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\tan x \geq 0$, pour $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$.

donc $\tan^n x \geq 0$

d'où $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x\,dx \geq 0$

" $I_n \geq 0$.

c/ $I_{n+1} - I_n = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^{n+1} x - \tan^n x\,dx$

$= \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n x(\tan x - 1)\,dx$.

Comme $\tan^n x \geq 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

$\tan x - 1 \leq 0$ pour $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$.

d'où $I_{n+1} - I_n$ décroissante

or $I_n \geq 0$. pour tout $n \in$

donc $(I_n)$ est minorée

2/a/ pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$I_n + I_{n+2} = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \tan^n(x).(1+\tan^2 x)\,dx$

$= \left[\dfrac{\tan^{n+1} x}{n+1}\right]_0^{\pi/4}$

$= \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{0}{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

b/ ~~pour $x \in [0,\frac{\pi}{4}]$,~~

~~$\tan 0 \leq \tan x \leq \tan\frac{\pi}{4}$ ($\tan x$ croiss~~

$I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$ et $I_{n+1} \geq 0$.

donc $I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

→ De plus $(I_n)$ est décroissante

donc $I_n \geq I_{n+2}$

ssi $2I_n \geq I_{n+2} + I_n$

ssi $I_n \geq \dfrac{1}{2(n+1)}$

D'où $\dfrac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2(n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

3/ $I_2 = 1 - \frac{\pi}{4}$.

$I_4 = \dfrac{1}{3} - I_2$

$= \dfrac{1}{3} - 1 + \dfrac{\pi}{4}$

$= \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{2}{3}$.