## Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

On désigne par $C_f$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, (unité 2 cm).

1. Etudier f et tracer $C_f$.

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. On désigne par $F_n$ la fonction définie sur $\left[\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ par $F_n(x)=\displaystyle\int_0^{\tan(x)}\dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^{n+1}}\,dt$.

   a. Montrer que $F_n$ est dérivable sur $\left[\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$ et que $F_n'(x)=\dfrac{1-\tan^2(x)}{\left(1+\tan^2(x)\right)^n}$.

   b. Déterminer l'expression de $F_0(x)$ en fonction de x pour tout $x\in\left[\dfrac{-\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}\right]$.

   c. En déduire l'aire, en $cm^2$, de la partie du plan limitée par $C_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

3. a. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\right\}$, $\cos(2x)=\dfrac{1-\tan^2(x)}{1+\tan^2(x)}$.

   b. En déduire l'expression de $F_1(x)$ en fonction de x.

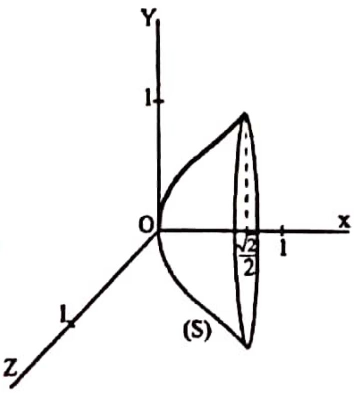
4. Soit $(u_n)$ la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{4n}\right)$.

   a. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{u_n}\dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt=\dfrac{1}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{2n}\right)$.

   b. En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{u_n}\dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt=\int_0^{\lim\limits_{n\to+\infty}u_n}\dfrac{1-t^2}{\left(1+t^2\right)^2}\,dt$.

## Exercice 2

Dans la figure ci-contre, le solide de révolution (S) est obtenu en faisant tourner la portion de la courbe d'équation $y=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{1-x^4}}$, $x\in\left[0,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$ autour de l'axe (OX).




Le but de cet exercice est de calculer le volume de ce solide.

1. Soit F la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $F(x)=\displaystyle\int_0^{\sqrt{\sin x}}\dfrac{t}{\sqrt{1-t^4}}\,dt$

   a. Montrer que F est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   b. Montrer que F est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et déterminer $F'(x)$ pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. Exprimer $F(x)$ en fonction de x, pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

3. Conclure.