Primitives

math-pilote.blogspot.com

Prof :Mr Ben Brahim M.H
Lycée Pilote Nabeul

Les Primitives

- **Définition :**

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle J.
Une fonction F définie sur I est une primitive de f sur I lorsque F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $F'(x) = f(x)$.

- **Théorèmes :**

- Théorème 1 :

> Toute fonction continue sur un intervalle I possède des primitives sur I.

- Théorème 2 :

> Si F est une primitive de f sur I alors, toute autre primitive G de f sur I s'écrit :
> $G(x) = F(x) + k$ avec k étant une constante réelle.

- Théorème 3 :

> Si f est continue sur I alors il existe qu'une seule primitive F sur I prenant la valeur $F(x_0)$ en x_0.

- Théorème 4 :

> Soient α et β deux réels, f et g deux fonctions continues sur I une primitive de $h = \alpha f + \beta g$ est la fonction $H = \alpha F + \beta G$ avec F et G sont des primitives respectives de f et g sur I.

- **Tableau des primitives usuelles :** ($n \in \mathbb{Q}$, k un réel).

f(x)	Une primitive
a, $a \in IR$	ax
x	$\frac{1}{2}x^2$
x^n, $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$

f(x)	Une primitive
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$1 + tg^2x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + k$
$1 + tg^2(ax+b) = \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$	$\frac{1}{a}tg(ax+b)$
$1 + cotg^2x = \frac{1}{\sin^2 x}$	$-cotg\,x + k$

- **Opérations sur les primitives :**

F et G primitives de f et g définies sur I, $n \in \mathbb{Q}$ $k \in IR$

Fonctions	Primitives
$f+g$	$F+G+K$
$\lambda f (\lambda \in IR)$	$\lambda F + k$
$f'.f^n$, $n \neq -1$	$\frac{1}{n+1}f^{n+1}+k$
$\frac{f'}{f^2}$	$-\frac{1}{f}+k$
$f'\sqrt{f}$	$\frac{2}{3}f\sqrt{f}+k$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f}+k$
$f'g+fg'$	$fg+k$
$\frac{f'g-fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}+k$
$f' \times (g' o f)$	$g o f$

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie sur $[-1,0]$ par $x^3+3(n+1)x+1$

1) Montrer que l'équation $f_n(x)=0$ possède sur $[-1,0]$ une unique solution α_n $(n \in \mathbb{N})$

2) Prouver que la suite (α_n) est croissante.

3) En déduire que la suite (α_n) est convergente.

4) Vérifier que $\alpha_n = \dfrac{-1}{\alpha_n^2+3(n+1)}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n$.

Exercice 4: Soit h une fonction continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$ tel que $f([0,+\infty[)=[0,1[$

1) Montrer que pour tout $n \in IN^*\backslash\{1\}$, l'équation $h(x)=\dfrac{1}{n}$ admet une unique solution α_n.

2) On définie la suite (α_n) définie sur $IN^*\backslash\{1\}$,

a) Montrer que la suite (α_n) est décroissante.

b)Montrer que la suite (α_n) est convergente et calculer sa limite.

Lycée Pilote Nabeul
Prof Mr Ben Brahim
Série(Primitives)
Classes : $4^{ème}$ Math

Exercice 1 : Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=\dfrac{x^5-2x^3+x^2+1}{x^2}$ $\quad I=]0,+\infty[$

2) $f(x)=\dfrac{3x}{(x+1)^3}$ $\quad I=]-1,+\infty[$

3) $f(x)=\dfrac{3x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\quad I=IR$

4) $f(x)=x(2x-3)^{-5}$ $\quad I=]3,+\infty[$

5) $f(x)=\sqrt{x+1}$ $\quad I=]-1,+\infty[$

6) $f(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ $\quad I=]0,+\infty[$

7) $f(x)=tgx+tg^3x$ $\quad I=IR$

8) $f(x)=(4x-3)\cos(2x^2-3x+1)$ $\quad I=IR$

9) $f(x)=\cos^2(x)$ $\quad I=IR$

10) $f(x)=\dfrac{x+3}{(x+2)^3}$ $\quad I=]0,+\infty[$

Exercise 2: Déterminer une primitive de f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=\sin^5 x$ $\quad I=IR$

2) $f(x)=\cos^2 x$ $\quad I=IR$

Exercice 3: Soit $f(x)=\dfrac{x}{(x-1)^3}$

1) Montrer que f admet des primitives sur $]1,+\infty[$.
2) Déterminer deux réels a et b tel que pour tout réel $x\neq 1$: $f(x)=\dfrac{a}{(x-1)^2}+\dfrac{b}{(x-1)^3}$
3) Déterminer la primitive F de f sur $]1,+\infty[$ tel que $F(2)=3$

Exercice 4 : Soit $f(x)=x\sqrt{\dfrac{2}{2+x}}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Montrer que la fonction $F: x \longrightarrow \dfrac{4}{3}(x-4)\sqrt{\dfrac{2+x}{2}}$ est une primitive de f sur $]1,+\infty[$

Exercice 5 :
Soit la fonction f définie par $\begin{cases} f(x)=x^2 & \text{si } x\in[0,1] \\ f(x)=2x-1 & \text{si } x\in]1,2] \end{cases}$

1) Montrer que f admet des primitives sur $[0,2]$.
2) Déterminer les primitives de f sur $[0,2]$

Exercice 6 : Soit la fonction $f: x\to\sqrt{1-x^2}, x\in[-1,1]$.

1) Montrer que f admet une unique primitive F sur $[-1,1]$ tel que que $F(0)=0$
2) Montrer que F est impaire
3) Soit $G(x)=F(\sin x)$ avec $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer $G'(x)$.

b) En déduire que $\forall x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$ et F sa primitive sur IR qui s'annule en - 1.

Soit CF la courbe de F dans un repère orthonormé R $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) Montrer que I(- 1,0) est un centre de symétrie de CF.

2) Soit H la fonction définie sur $]-1,+\infty[$; par: $H(x)=F(x)+F\left(\dfrac{-x}{x+1}\right)$.

a) Montrer que H est dérivable sur $]-1,+\infty[$ et calculer $H'(x)$.

b) En déduire que pour tout $x\in]-1,+\infty[$, on a: $H(x)=2F(0)$.

3) Soit la fonction G définie sur $\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ par $G(t)=F(-1+\tan t)$.

a) Montrer que quel que soit $t\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$ G (t) =t.

b) En déduire que $F(0)=\dfrac{\pi}{4}$

4) a) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$

b) Dresser le tableau de variation de F sur $[-1,+\infty[$

c) Donner l'allure de la courbe de CF.

Exercice 8 : Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt[3]{2-2x}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.
2) Etudier la dérivabilité de f en 1 et préciser le domaine de dérivabilité de f.
3) Dresser le tableau de variation de f et tracer Cf dans un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j})$.
4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.
5) Déterminer $(f^{-1})'(x)$.
6) Déterminer l'expression de $f^{-1}(x)$ par deux méthodes.

Exercice 9 :

Soit la fonction f définie sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ par $f_n(x)=\sqrt[n]{tgx}$ avec n est un entier naturel supérieur ou égal à 2

1. Etudier la dérivabilité de f_n sur $[0,\dfrac{\pi}{2}[$.
2. Montrer que f_n réalise une bijection de $[0,\dfrac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
3. montrer que la fonction réciproque f_n^{-1} de f_n est dérivable sur J.
4. montrer que pour tout x appartenant J on a : $(f_n^{-1})'(x)=\dfrac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$

Série Primitive :

Exercice n°6

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$; $x \in [-1;1]$

1- $x \longmapsto 1-x^2$ est continue et strictement positif sur $I = [-1,1]$

alors f est continue sur I

Ainsi f admet au moin une primitive F

Soit G une autre primitive tel que $G(0)=0$

$F(0) = G(0) + c \Rightarrow 0 = 0 + c$

d'où $c = 0$

donc f admet ~~une~~ unique primitive F sur $[-1;1]$

2- $D_f = [-1;1]$ alors $\forall x \in D_f$

$-x \in D_f$

on pose $\varphi(x) = F(-x) + F(x)$; $x \in [-1;1]$

$\varphi'(x) = -f(x) + f(x)$

$= 0$

d'où $\varphi(x) = \varphi(0) = 2F(0) = 0$

Ainsi $F(-x) + F(x) = 0 \Rightarrow F(-x) = -F(x)$

donc F est impaire.

3- $G(x) = F(\sin x)$ avec $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$x \xrightarrow{\sin} \sin x \xrightarrow{F} F(\sin x) = G(x)$

$J = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to J' = [-1,1]$

$x \mapsto \sin x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

donc $\sin x \in [-1,1]$

$x \mapsto F(x)$ est dérivable sur $[-1,1]$

d'où G est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$G'(x) = f(\sin x) \cdot \cos(x)$

$= \sqrt{1-\sin^2 x} \cdot \cos(x)$

$= \sqrt{\cos^2 x} \cdot \cos(x)$

$= |$

3- $G'(x) = \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$ — $\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}$

$G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$ — $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

on a $G(0) = F(\sin 0) = 0$

or $G(0) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x) + cst = 0 + cst$

d'où $G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$

Exercice n°8 :

$f(x) = \sqrt[3]{2-2x}$

1/ $D_f =]-\infty; 1]$

2) $\lim_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt[3]{2-2x}}{x-1}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt[3]{2-2x}\,(\sqrt[3]{2x-2x})^2}{(x-1)(\sqrt[3]{2-2x})^2}$

$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-2(x-1)}{(\sqrt[3]{2-2x})^2(x-1)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$

C_f admet au pt $M_0(1,0)$ une demi-tg vertical dirigé vers le haut.

$\forall x \in]-\infty, 1[$; la fct $x \mapsto 2-2x$ est dérivable et strictement positif alors f est dérivable sur $]-\infty, 1[$

3- $\forall x \in]-\infty, 1[$ on a ; $f(x) = (2-2x)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x) = \frac{1}{3}(2-2x)^{-\frac{2}{3}} \times -2$

$= \frac{-2}{3\sqrt[3]{(2-2x)^2}} < 0$

d'où f est décroissante

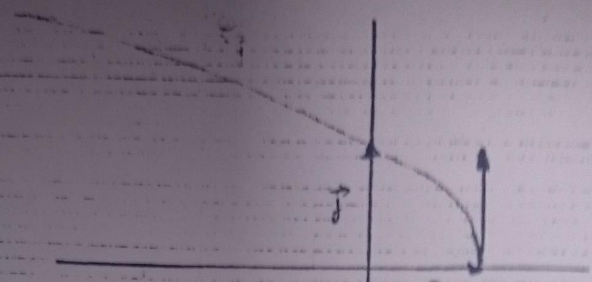
x	$-\infty$	1
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	0

$\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{2-2x} = +\infty$

$\lim_{x\to 1} \sqrt[3]{2-2x} = 0$

$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-\sqrt[3]{2-2x}}{\ldots} = \lim \ldots \sqrt{-2-2x} \ldots = 0$

C_f admet une ... au voisinage de $-\infty$



4/ f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty, 1]$
donc f est une bijection de $]-\infty, 1]$ sur $J = [0, +\infty[$
d'où f admet une fonction réciproque définie sur $J = [0, +\infty[$

5) $y \xrightarrow{f} \sqrt[3]{2-2x} = x$, f^{-1}

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'}$

f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ $\longrightarrow$ alors f^{-1} est dérivable sur $f(]-\infty, 1[) =]0, +\infty[$

$\forall y \in]-\infty, 1[\; , \; f'(y) = \frac{-2}{3\sqrt[3]{(2-2x)^2}} \neq 0$

$\forall x \in]0, +\infty[\quad (f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(y)} = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{(2-2x)^2}$.

or $f(y) = x$ sig $\sqrt[3]{2-2y} = x$
d'où $(f^{-1})'(x) = \frac{-2}{3}x^2$

6) Méthode 1 : Primitive

$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 1$ or $f^{-1}(0) = 1$ $\Longrightarrow$ conclusion $\forall x \in [0, +\infty[$
$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 1$

- Méthode 2 :

$f^{-1}(x) = y \iff f(y) = x = \sqrt[3]{2-2y}$; $y \in]-\infty, 1]$; $x \in [0, +\infty[$

$\Longrightarrow x^3 = 2 - 2y$

$\Longrightarrow y = \frac{2 - x^3}{2}$

$\Longrightarrow f^{-1}(x) = y = 1 - \frac{1}{2}x^3$, $x \in [0, +\infty[$