Lycée pilote de Bizerte	Serie d'exercices n°8 4éme Math	Prof:M.Benali

Exercice 1 :

1) *soit f et g deux fonctions* dérivables sur IR telle que f'(-2)=-3 et g(x)=f(-x²) alors:

a) $g'(\sqrt{2}) = -3$ b) $g'(\sqrt{2}) = -6\sqrt{2}$ c) $g'(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}$

2) *soit f une fonction* dérivable sur IR telle que pour tout $x \in IR$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Pour tout $x \succ 0$, *on pose* $g(x) = f(\dfrac{1}{x})$ *alors:*

a) $g'(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$ b) $g'(x) = \dfrac{1}{x^2(1+x^2)}$ c) $g'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

3) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos(\cos x) - 1}{2x - \pi} =$

a) $+\infty$ b) 0 c) 1

4) *Soit f une fonction dérivable sur l'intevalle* $[1,2]$ *telle que pour tout* $x \in [1,2]$; $-3 \le f'(x) \le 2$ *alors :*

a) $|f(2) - f(1)| \le 2$ b) $|f(2) - f(1)| \le 3$ c) $-2 \le f(2) - f(1) \le 3$

5) *Soit f une fonction continue sur* $[1,2]$, *dérivable sur* $]1,2[$ *telle que* $f(1) = f(2)$, *alors :*

a) *f est constante sur* $[1,2]$ b) *f' s'annule sur* $[1,2]$ c) *f s'annule sur* $[1,2]$

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ *.On désigne par (C) sa courbe représentative dans un R.O.N* $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) *Montrer que pour tout* $x \succ -1$, *on a* $f'(x) = \dfrac{x+2}{2(\sqrt{x+1})^3}$.

b) *Dresser le tableau de variation de f.*

c) *Ecrire une équation de la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.*

d) *Tracer (C) ainsi que sa tangente au point d'abscisse 0.*

2) *On pose pour tout x de* IR_+, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$.

a) *Montrer que pour tout* $x \in IR_+$, *on a :* $-\dfrac{1}{2} \le \varphi'(x) \le 0$.

b) *Montrer que pour tout* $x \in IR_+$, *on a :* $1 - \dfrac{x}{2} \le \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \le 1$.

c) *En déduire que pour tout* $x \in IR_+$, *on a :* $x - \dfrac{x^2}{2} \le f(x) \le x$.

3) Soit (u_n) la suite définie sur IN^* par : $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{k+n^2}}$.

a) Vérifier que pour tout $n \in IN^*$, On a : $u_n = \sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n^2})$.

b) Montrer que pour tout entier $k \in \{1,2,.....,n\}$ on a : $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \leq f(\frac{k}{n^2}) \leq \frac{k}{n^2}$.

c) Montrer que pour tout $n \in IN^*$, on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{n+1}{2n}$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

<u>Exercice 3 :</u>

Soit (u_n) et (v_n) les suites définies sur IN^* par : $u_n = \sum_{k=1}^{2n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$, $v_n = u_n + \frac{1}{2n+1}$.

1) Etudier la monotonie des suites (u_n) et (v_n).

2) Montrer que pour tout $n \in IN^*$; $u_n \leq v_n$.

3) Calculer $\lim_{n\to+\infty}(u_n - v_n)$.

4) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la meme limite ℓ.

2) Montrer que u_5 et v_5 sont des valeurs approchées de ℓ à 10^{-1} prés.

<u>Exercice 4 :</u>

Soit $\theta \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, on pose $P(z) = z^2 + (1 - i - i\sin\theta)z - i - \sin\theta = 0$.

1) a) Calculer $P(i)$.

b) En déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

2) Le plan complexe est rapporté a un R.O.N.D $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. Soit ζ le cercle trigonométrique.

I le point d'affixe -1 ; M et B les points d'affixes respectives $(e^{i\theta})$ et $(-1 + i\sin\theta)$

a) Déterminer l'ensemble des points B lorsque θ décrit $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + \cos\theta$. Placer les points A, M et B sur une figure et montrer que OAMB est un parallélogramme.

3) a) Montrer que pour tout OAMB est un losange si et seulement si $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$.

b) En déduire qu'il existe une seule valeur de θ pour laquelle OAMB est un losange.

c) Soit (θ) l'aire du parallélogramme OAMB. Montrer que (θ) est maximale lorsque $\theta = \frac{\pi}{3}$

Prof:M.BenAli

Série n° 8

Ex 2)

$f :]-1,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans RON $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1).a) On a :

la fonction $x \mapsto x+1$ est dérivable et strict. positive sur $]-1,+\infty[$.

donc la fct. $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est dérivable et non nulle sur $]-1,+\infty[$

la fct $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ dérivable sur $]-1,+\infty[$

donc f dérivable sur $]-1,+\infty[$.

et pour $x>-1$,

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \left(\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\right)(x)}{(\sqrt{x+1})^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x+1}) \times (2\sqrt{x+1}) - x}{2 \cdot \sqrt{x+1}^3}$$

$$= \frac{2(x+1) - x}{2 \cdot \sqrt{x+1}^3}$$

$$= \frac{x+2}{2\sqrt{x+1}^3} > 0$$

b)

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

avec $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

$= -\infty$.

et $\lim\limits_{+\infty} f = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$

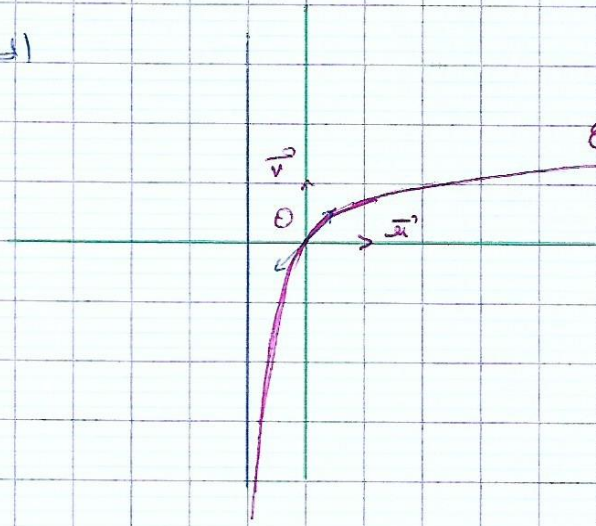
$= \lim \ldots$

c) On a $f'(0) = \dfrac{0+2}{2\sqrt{0+1}^3} = 1$.

donc la tangente T à $\mathcal{C}_f$ au point d'[abscisse] 0 est : T : $y = 1(x-0) + f(0)$

$= x$

d)



On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$.

2) pour $x \in \mathbb{R}_+$, $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$

a)

D'après la question 1)a), la fon[ction] $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ en particulier sur $[0,+\infty[$.

donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\varphi'(x) = \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^2} = \frac{-1}{2\sqrt{x+1}^3}$$

Or on a pour $x \geq 0$,

ssi $2\sqrt{x+1}^3 \geq 2 > 0$

ssi $0 < \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}} \leq \dfrac{1}{2}$

ssi $-\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{-1}{2\sqrt{x+1}} < 0$

ssi $-\dfrac{1}{2} \leq \varphi'(x)$ …

~~On a φ continue sur $[0, x]$~~
~~dérivable sur $]0, x[$~~
~~et pour $t \in]0, x[$~~

~~Selon le thé~~

~~On a pour $t \in \mathbb{R}_+$~~

On a φ dérivable sur $[0, x]$, $x > 0$

et pour tout $t \in]0, x[$

$$-\frac{1}{2} \leq \varphi'(t) \leq 0$$

Selon le théorème des inégalités des accroissements finis, On a

$$-\frac{1}{2}(x-0) \leq \varphi(x) - \varphi(0) \leq 0(x-0)$$

ssi $\frac{-x}{2} \leq \varphi(x) - 1 \leq 0$

ssi $1 - \frac{x}{2} \leq \varphi(x) \leq 1$

avec $x \in \mathbb{R}_+^*$.

• pour $x = 0$, $\varphi(0) = 1$.

donc $1 - \frac{0}{2} \leq \varphi(x) \leq 1$

D'où, pour $x \in \mathbb{R}_+$, $1 - \frac{x}{2} \leq \varphi(x) \leq 1$

c) pour $x \in \mathbb{R}_+$, On a:

$$1 - \frac{x}{2} \leq \varphi(x) \leq 1$$

ssi $1 - \frac{x}{2} \leq \frac{1}{\sqrt{x+1}} \leq 1$

ssi $x - \frac{x^2}{2} \leq \frac{x}{\sqrt{x+1}} \leq x$

ssi $x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x$

3) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k+n^2}}$

a) pour $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$, On a

$$\left(\frac{k}{n^2}\right) \in \mathbb{R}_+.$$

donc $f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \frac{k/n^2}{\sqrt{\frac{k}{n^2}+1}}$

$$= \frac{k}{n^2 \cdot \sqrt{\frac{k+n^2}{n^2}}}$$

$$= \frac{k}{n^2 \cdot \frac{1}{n} \sqrt{k+n^2}}$$

=

d'où $\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{\sqrt{k+n^2}}$

$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{\sqrt{k+n^2}}$$

$$= U_n.$$

b) On a, pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x$$

or $\left(\frac{k}{n^2}\right) \in \mathbb{R}_+$, pour $k \in \mathbb{N}^*$.

donc ~~$k \; f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$~~

$$\frac{k}{n^2} - \frac{\left(\frac{k}{n^2}\right)^2}{2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

$$\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

or $k^2 \geq 1$

donc $\frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^2} \geq \frac{k}{n^2} - \frac{1}{2n^2}$

d'où $\frac{k}{n^2} - \frac{1}{2n^2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$

c) ssi $\frac{2k-1}{2 \cdot n^2} \leq f\left(\frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$

ssi $\frac{n^2}{2n^4} \sum_{k=1}^{n} \frac{2k-1}{1} \leq U_n = \sum_{k=1}^{n}$

ssi $\frac{1}{2n^2} \cdot \frac{(3+2n+1)n}{2} \leq U_n \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n(}{2}$

ssi $\frac{4+2n}{4n} \leq U_n \leq \frac{n+1}{2n}$,

Or $\frac{4+2n}{4n} - \frac{1}{2} = \frac{8+4n-4n}{4n \cdot 2} = \frac{8}{8n} >$

donc $\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{n+1}{2n}$

$\in \mathbb{N}^*$,

Exercice 3:

pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$V_n = U_n + \frac{1}{2n+1}$

1) $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$= \frac{(-1)^{2n+1+1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2+1}}{2n+2} + \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}} - \cancel{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}}$

$= \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$

pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $2n+2 > 2n+1 > 0$

ssi $\frac{1}{2n+2} < \frac{1}{2n+1}$

d'où (U_n) est croissante.

~~$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}$~~
~~donc (V_n) est décroissante.~~
~~car $U_{n+1} < U_n$ et $2n+3 > 2n+2 \Rightarrow \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1} < 0$~~
~~2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = U_n + \frac{1}{2n+1}$~~

$V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+1}$

$= \cancel{\frac{1}{2n+1}} - \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} - \cancel{\frac{1}{2n+1}}$

$= \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+2} \leq 0$.

Car $2n+3 > 2n+2 > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+2}$

donc (V_n) est décroissante.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n = U_n + \frac{1}{2n+1}$

ssi $V_n - U_n = \frac{1}{2n+1} \geq 0$

donc $V_n \geq U_n$.

3) On a $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = \lim_{n \to +\infty} \frac{-1}{2n+1}$

4) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

- $U_n \leq V_n$.
- (U_n) est croissante
- (V_n) est décroissante
- $\lim_{n \to +\infty} (U_n - V_n) = 0$

} donc (U_n) et (V_n) ~~convergentes~~ adja[centes] et elles converge[nt vers] la même limite ℓ

5) * On a (V_n) est décroissante et convergente donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $V_n \geq \ell$.

en particulier $V_5 \geq \ell$. (1)

* De même (U_n) est croissante et cvg donc pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \leq \ell$.

en particulier $U_5 \leq \ell$ (2)

(1) et (2): $U_5 \leq \ell \leq V_5$

Or $U_5 = \sum_{k=1}^{10} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1627}{2520} \simeq 0,6[4]$

et $V_5 = U_5 + \frac{1}{2n+1} \simeq 0,7365$.

Comme $V_5 - U_5 = 0,09\ldots < 10^{-1}$,

donc U_5 et V_5 sont des valeurs approchées à ℓ à 10^{-1} près.

Ex 4

Pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

$P(z) = z^2 + (1 - i - i\sin\theta)z - i - \sin\theta =$

1) a) $P(i) = i^2 + (1 - i - i\sin\theta)i - i - \sin\theta$

$= -1 + i + 1 + \sin\theta - i - \sin\theta$

$= 0$

b) i solution de $P(z) = 0$

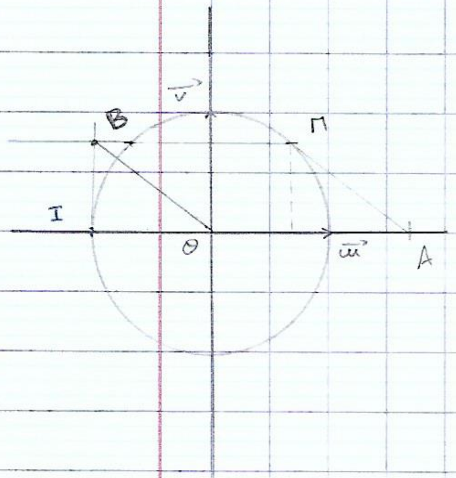
donc $P(z) = 0$

~~ssi $(z - i)(z + 1 + \sin\theta) =$~~

$(z - i)(z + 1 - i\sin\theta) = 0$

donc $S_{\mathbb{C}} = \{i, i\sin\theta - 1\}$

2)



a) ~~On a $Z_B = -1 + i\sin\theta$~~

~~ssi $Z_B - Z_I = i\sin\theta$.~~

~~donc ...~~

~~d'où $B \in \mathcal{C}_{(I, ...)}$~~

~~or pour $\theta = 0$, $Z_B = -1$.~~

On a $Z_B = -1 + i\sin\theta$.

Comme $Re(Z_B) = -1$.

alors $B \in \Delta : x = -1$.

or pour $\theta = 0$, $Z_B = -1$.

$\theta = \frac{\pi}{2}$; $Z_B = -1 + i$.

Soient $K(-1)$ et $K'(-1+i)$.

lorsque θ varie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$,

B varie sur $]KK'[$.

b) On a $Z_{\vec{BM}} = Z_M - Z_B$

$= e^{i\theta} - (-1 + i\sin\theta)$

$= \cos\theta + i\sin\theta + 1 - i\sin\theta$

$= 1 + \cos\theta$.

$= Z_A - Z_O$

$= Z_{\vec{OA}}$

Comme A, B, M, O sont distincts et $\vec{BM} = \vec{OA}$ }

OAMB est un parallélogramme.

3) a) Pour OAMB losange.

On a $OA = OB$.

ssi $|Z_A| = |Z_B|$.

ssi $|1 + \cos\theta| = |-1 + i\sin\theta|$

ssi $\sqrt{(1+\cos\theta)^2} = \sqrt{1^2 + \sin^2\theta}$

ssi $\sqrt{(1+\cos\theta)^2} = \sqrt{1 + \sin^2\theta}$

ssi $(1 + \cos\theta)^2 = 1 + \sin^2\theta$

ssi $\cancel{1} + 2\cos\theta + \cos^2\theta = \cancel{1} + \sin^2\theta$

ssi $\cos^2\theta + 2\cos\theta = -\cos^2\theta + 1$.

ssi $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 = 0$.

b) OAMB losange ssi $2\cos^2\theta + 2\cos\theta - 1 =$

On pose $z = \cos\theta$.

On a $2z^2 + 2z - 1 = 0$

$\Delta = 4 + 4 = 8 = (2\sqrt{2})^2$

$z_1 = \frac{-2 - 2\sqrt{2}}{4} < 0$ ou $z_2 = \frac{-2 + 2\sqrt{2}}{4}$

ou $z_2 = \frac{(\sqrt{2} - 1)}{2}$

donc $\cos\theta = \frac{-1 - \sqrt{2}}{2} < 0$ ou $\cos\theta = \frac{\sqrt{2} -}{2}$

or $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$. donc $\cos\theta > 0$

d'où $\cos\theta = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$.

d'où θ est unique.

c) Soit $J = p_{\perp (OA)}(M)$.

On a $J(\cos\theta)$.

On a $\mathcal{A}_{OAMB} = OA \cdot MJ$.

$= |Z_A| \cdot |Z_J - Z_M|$

$= |1 + \cos\theta| \cdot |\cos\theta - \cos\theta - i\sin\theta +$

$= |1 + \cos\theta| \cdot |\sin\theta|$.

$= \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 (\sin^2\theta)}$

$= \sqrt{(1 + \cos\theta)^2 (1 - \cos^2\theta)}$

$= \sqrt{(1 + 2\cos\theta + }$

$= \sqrt{1 - \cos^2\theta + 2\cos}$