Lycée pilote de Tunis	**Fonctions Réciproques**	*Terminales maths*
Mr Ben Regaya. A	**+Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice 1 « facile »

Le plan P muni d'un repère orthonormé direct $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1$.

   a) Etudier les variations de g .Montrer que le point $I\left(0,-1\right)$ est un centre de symétrie de C_g .

   b) Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-2,0\right[$.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3}-x+1\right)$.

   a) Etudier les variations de f .

   b) Montrer que C_f admet deux asymptotes dont on déterminera les équations.

   c) Déterminer la position de C_f par rapport à l'asymptote oblique .Construire C_f .

3. a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1}, tracer sa courbe dans le même repère.

   b) Expliciter $f^{-1}(x)$.

Exercice 2 « facile »

Soit f la fonction définie sur $\left[1,+\infty\right[$ par : $f(x)=\sqrt{x-1}+2-x$. (C) est la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.Interpréter géométriquement en termes de tangente le résultat obtenu.

   b) Montrer que $f(x)$ a pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

2. a) Etudier les variations de f .

   b) Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α .Donner un encadrement d'amplitude 0,1de α

   c) Tracer la courbe (C) de f .

3. Soit h la restriction de f à $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[$.

   a)Montrer que h est une bijection de $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} et montrer que $\left(h^{-1}\right)'(0)=\dfrac{2(\alpha-2)}{5-2\alpha}$.

   c) Montrer que $x\in\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[$; $x+f(x)-\dfrac{5}{2}\geq 0$.

   d) Expliciter alors $h^{-1}(x)$, pour tout $x\in J$.

   e) Tracer la courbe (C') de h^{-1}.

Exercice 3 « facile »

Soit f la fonction définie sur $\left[0,1\right]$ par : $f(x)=\sqrt{1-x^2}-x$. (C) est la courbe de f dans un repère orthonormé.

1. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2. Dresser le tableau de variation de f .

3. a) Montrer que f admet sur $[0,1]$ une fonction réciproque notée h définie sur un intervalle I que l'on précisera.

   b) Expliciter pour x élément de I le réel $h(x)$.

4. Pour n entier naturel non nul, on pose $g_n(x) = f(x) - x^n$

   a) Montrer que l'équation $f(x) = x^n$, a une seule solution a_n dans $]0,1[$.

   b) Justifier que pour $(n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ tel que $n \succ p$ et pour tout x de $]0,1[$ on a : $g_n(x) \succ g_p(x)$.

   c) En déduire que (a_n) est une suite croissante et qu'elle est convergente.

Exercice4 « facile »

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1 - tanx}$.

1. a) Etudier les variations de f.

   b) Déduire que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

   c) Construire la courbe C de f et la courbe C' de f^{-1} dans un même repère orthonormé

2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et que pour tout x de J, on a : $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

3. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'équation $f(x) = n$, admet dans I une solution unique notée x_n.

   b) Montrer que la suite (x_n) est croissante et qu'elle est convergente.

   c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n$.

Exercice 5 « facile »

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \dfrac{1}{1 + sin\,x}$.

1. Soit φ la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x) = \dfrac{1 - x}{x} - sin\,x$.

   a) Etudier les variations de φ.

   b) Montrer que l'équation $f(x) = x$, $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ est équivalente à l'équation $\varphi(x) = 0$. En déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. Montrer que f établit une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3. a) x étant un élément de J, exprimer $sin\left(f^{-1}(x)\right)$ et $cos\left(f^{-1}(x)\right)$ en fonction de x.

   b) En déduire le réel $f^{-1}\left(\dfrac{2}{3}\right)$.

Exercice 1

1. a) La fonction $x \mapsto x^2+3$ est polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2+3 \succ 0$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+3}-x\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}}{x^2+3}=\dfrac{3}{\left(\sqrt{x^2+3}\right)^3}\succ 0$. g est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=-2 \text{ et}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}}-1=0$$ donc $g\left(\left]-\infty,+\infty\right[\right)=\left]-2,0\right[$. Faites un tableau de variation.

Montrons que le point $I(0,-1)$ est un centre de symétrie de C_g .

Si $x \in \mathbb{R}$ alors $2a-x=-x \in \mathbb{R}$, $g(-x)+g(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{x^2+3}}-1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1=-2=2\times b$ c'est le résultat demandé.

b) g est continue et elle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R})=\left]-2,0\right[$.

2. a) f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3}-x+1\right)$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}-1\right)=\dfrac{1}{2}g(x)$ or pour x réel $g(x)\in\left]-2,0\right[$ donc $g(x)\prec 0$ et par suite g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3}-(x-1)\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{x^2+3-(x-1)^2}{\sqrt{x^2+3}+(x-1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{2x+2}{\sqrt{x^2+3}+(x-1)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{2+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}+\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\frac{1}{2}.$$

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3}-(x-1)\right)=+\infty$. Donc $f(\mathbb{R})=\left]\dfrac{1}{2},+\infty\right[$.

b) La droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

Pour $x \prec 0$, $\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\left(\sqrt{x^2+3}-x+1\right)}{2x}=\dfrac{-x\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-x+1}{2x}=\dfrac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1+\frac{1}{x}}{2}$ et donc

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\sqrt{1+\frac{3}{x^2}}-1+\frac{1}{x}}{2}=-1.$$

Pour $x \prec 0$, $f(x)+x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3}-x+1\right)+x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3}+x+1\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)+\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{\sqrt{x^2+3}-x}\right)+\frac{1}{2}$ et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)+x=\frac{1}{2}$. ainsi la droite dont une équation $y=-x+\frac{1}{2}$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$

c) $f(x)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3}-x+1\right)-\left(-x+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+3}+\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$.

Or pour tout réel x, $x^2+3 \succ x^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3} \succ |x| \Rightarrow \sqrt{x^2+3} \succ -x \Leftrightarrow \sqrt{x^2+3}+x \succ 0$.

Ainsi pour tout réel x, $f(x)-\left(-x+\frac{1}{2}\right) \succ 0$ et par suite (C) est au dessus de son asymptote oblique .

3. a) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$. la fonction réciproque de f existe définie sur $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.

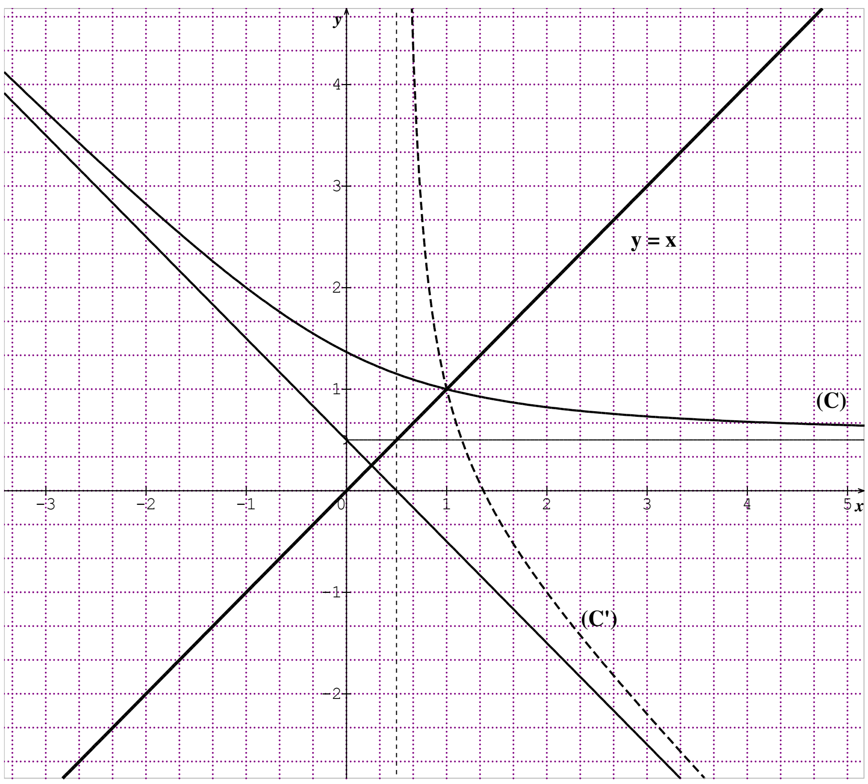
b) On a : $f^{-1}(x)=y, x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[\Leftrightarrow f(y)=x, y\in\mathbb{R}$.

$f(y)=x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\sqrt{y^2+3}-y+1\right)=x \Leftrightarrow \sqrt{y^2+3}-y+1=2x \Leftrightarrow \sqrt{y^2+3}=2x+y-1$

$\Leftrightarrow y^2+3=(2x+y-1)^2 \Leftrightarrow y^2+3=4x^2+(y-1)^2+4x(y-1) \Leftrightarrow y^2+3=4x^2+y^2-2y+1+4xy-4x$

$\Leftrightarrow 3=4x^2-2y+1+4xy-4x \Leftrightarrow y(-2+4x)=-4x^2+2+4x \;\; y=\frac{4x^2-4x-2}{2-4x}$ .Ainsi

$f^{-1}(x)=\frac{4x^2-4x-2}{2-4x}$ pour $x\in\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$.



Exercice 2

1. a) Pour $x \succ 1$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x-1}+2-x-1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x-1}+1-x}{x-1} = \dfrac{\sqrt{x-1}}{x-1} - 1 = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - 1$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{1}{\sqrt{x-1}} - 1 = +\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 1. (C) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 1 \end{cases}$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}} + \dfrac{2}{x} - 1\right) = -\infty$.

2. a) f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} - 1 = \dfrac{1-2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1-4(x-1)}{2\sqrt{x-1}\left(1+2\sqrt{x-1}\right)} = \dfrac{-4x+5}{2\sqrt{x-1}\left(1+2\sqrt{x-1}\right)}$ .Le signe de $f'(x)$ sur $]1,+\infty[$ et celui de $-4x+5$. Or $-4x+5=0 \Leftrightarrow x = \dfrac{5}{4}$. Ainsi f est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[$ et strictement croissante $\left[1,\dfrac{5}{4}\right]$.

$f\left(\dfrac{5}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{5}{4}-1} + 2 - \dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{2} + 2 - \dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{4}$.

$f\left\langle\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[\right\rangle = \left]-\infty,\dfrac{5}{4}\right]$ et $f\left\langle\left[1,\dfrac{5}{4}\right]\right\rangle = \left[1,\dfrac{5}{4}\right]$.

b) Soit f_1 la restriction de f à $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[$. f_1 est continue et strictement décroissante sur cet intervalle donc elle réalise une bijection de $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[$ sur $f_1\left\langle\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[\right\rangle = \left]-\infty,\dfrac{5}{4}\right]$. $0 \in f_1\left\langle\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[\right\rangle$ donc il existe α unique dans $\left[\dfrac{5}{4},+\infty\right[$ tel que $f_1(\alpha)=0$.

Soit f_2 la restriction de f à $\left[1,\dfrac{5}{4}\right]$. f_2 est continue et strictement croissante sur cet intervalle donc elle réalise une bijection de $\left[1,\dfrac{5}{4}\right]$ sur $f_2\left\langle\left[1,\dfrac{5}{4}\right]\right\rangle = \left[1,\dfrac{5}{4}\right]$. $0 \notin f_2\left\langle\left[1,\dfrac{5}{4}\right]\right\rangle$ donc f_2 ne s'annule pas sur $\left[1,\dfrac{5}{4}\right]$ Conclusion l'équation $f(x)=0$ admet dans $[1,+\infty[$ une solution unique α. Pour l'encadrement faire le balayage avec la calculatrice.

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}} + \dfrac{2}{x} - 1\right) = -1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) + x = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-1} + 2 = +\infty$. Donc (C) admet une branche infinie parabolique de direction la droite $y = x$ au voisinage de $+\infty$.

Courbe plus tard.

3. a) Soit h la restriction de f à $\left[\frac{5}{4},+\infty\right[$. h est continue et strictement décroissante sur cet intervalle donc elle réalise une bijection de $\left[\frac{5}{4},+\infty\right[$ sur $f_1\left\langle\left[\frac{5}{4},+\infty\right[\right\rangle=\left]-\infty,\frac{5}{4}\right]$. Donc $J=\left]-\infty,\frac{5}{4}\right]$.

b) Dérivabilité de h^{-1} sur $J=\left]-\infty,\frac{5}{4}\right]$.

Dérivabilité de h^{-1} a gauche en $\frac{5}{4}$.

La demi-tangente à la courbe de h au point d'abscisse $\frac{5}{4}$ est horizontale donc par symétrie par rapport à $\Delta: y=x$ elle sera verticale à la courbe de h^{-1} au point d'abscisse $\frac{5}{4}$. Ainsi h^{-1} n'est pas dérivable a gauche en $\frac{5}{4}$.

Dérivabilité de h^{-1} sur $\left]-\infty,\frac{5}{4}\right[$.

h est dérivable $\left[\frac{5}{4},+\infty\right[$ et h' ne s'annule pas sur $\left]\frac{5}{4},+\infty\right[$ donc h^{-1} est dérivable sur $\left]-\infty,\frac{5}{4}\right[$

On a $h(\alpha)=0\Leftrightarrow h^{-1}(0)=\alpha$

$\left(h^{-1}\right)'(0)=\frac{1}{h'(\alpha)}$. Or $h'(\alpha)=\frac{1}{2\sqrt{\alpha-1}}-1$ et comme $h(\alpha)=0\Leftrightarrow\sqrt{\alpha-1}=\alpha-2$ et par suite

$h'(\alpha)=\frac{1}{2(\alpha-2)}-1=\frac{1-2\alpha+4}{2(\alpha-2)}=\frac{5-2\alpha}{2(\alpha-2)}$ ce qui donne $\left(h^{-1}\right)'(0)=\frac{2(\alpha-2)}{5-2\alpha}$.

c) $x+f(x)-\frac{5}{2}=x+\sqrt{x-1}+2-x-\frac{5}{2}=\sqrt{x-1}-\frac{1}{2}=\frac{2\sqrt{x-1}-1}{2}=\frac{4(x-1)-1}{2\left(2\sqrt{x-1}+1\right)}=\frac{4x-5}{2\left(2\sqrt{x-1}+1\right)}$ cette quantité est positive sur $\left[\frac{5}{4},+\infty\right[$ et donc pour tout $x\in\left[\frac{5}{4},+\infty\right[$; $x+f(x)-\frac{5}{2}\geq 0$.

d) On a : $h^{-1}(x)=y,\ \ x\in J\ \Leftrightarrow h(y)=x,\ \ y\in\left[\frac{5}{4},+\infty\right[$.

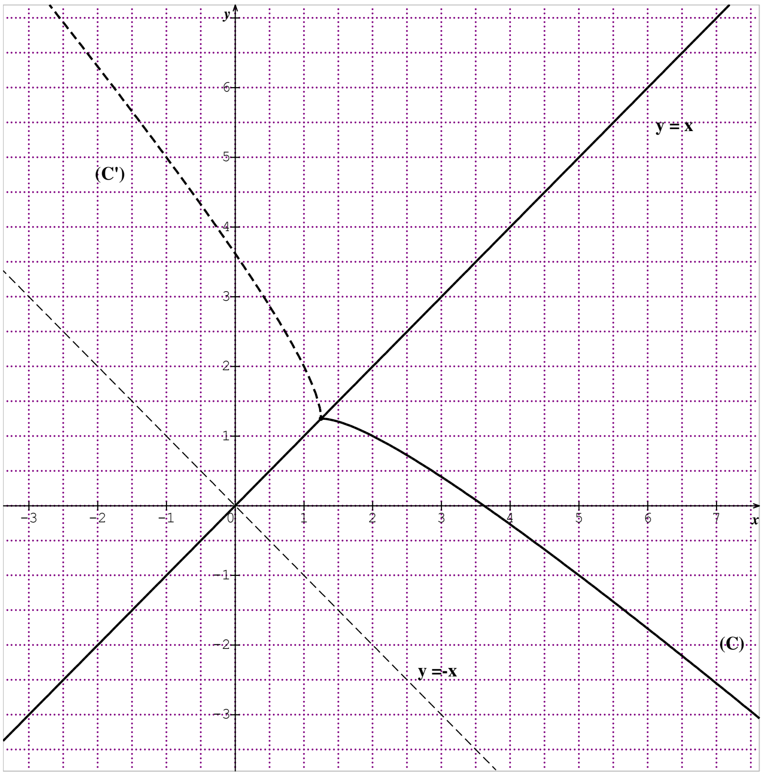
$$h(y)=x\Leftrightarrow\sqrt{y-1}+2-y=x\Leftrightarrow\sqrt{y-1}=x+y-2\Leftrightarrow y-1=(x+y-2)^2$$
$$\Leftrightarrow y-1=x^2+(y-2)^2+2x(y-2)\Leftrightarrow y-1=x^2+y^2+4-4y+2xy-4x$$

$\Leftrightarrow y^2+(2x-5)y+x^2+5-4x=0$. C'est une équation du second degré d'inconnue y.

$\Delta=(2x-5)^2-4\left(x^2-4x+5\right)=-4x+5$ et donc $y_1=\frac{5-2x+\sqrt{5-4x}}{2}=\frac{5}{2}-x+\frac{\sqrt{5-4x}}{2}$ et

$y_1=\frac{5-2x-\sqrt{5-4x}}{2}=\frac{5}{2}-x-\frac{\sqrt{5-4x}}{2}$ et compte tenu du fait que pour tout $y\in\left[\frac{5}{4},+\infty\right[$;

$y+h(y)-\frac{5}{2}\geq 0\Leftrightarrow y+x-\frac{5}{2}\geq 0$ et on voit que $y_1-\frac{5}{2}+x=\frac{\sqrt{5-4x}}{2}\geq 0$ alors $h^{-1}(x)=\frac{5}{2}-x+\frac{\sqrt{5-4x}}{2}$ pour tout $x\in J$.



Exercice 3

1. Pour $x \in [0,1[$, $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}-x+1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} + \dfrac{-x+1}{x-1} = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x-1} - 1 = \dfrac{1-x^2}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} - 1$

   $= \dfrac{-1-x}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} - 1$.

   $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{-1-x}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} - 1 = -\infty$. f n'est pas dérivable à gauche en 1. La courbe (C) admet au point d'abscisse 1 une demi-tangente d'équation : $\begin{cases} x=1 \\ y \geq -1 \end{cases}$.

2. f est dérivable sur $[0,1[$ et $f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 \prec 0$.

   On pour tout réel x de $[0,1[$ $f'(x) \prec 0$ et f est continue sur $[0,1]$ donc f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

   $f\left\langle [0,1] \right\rangle = [-1,1]$.

3. a) f est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $I = [-1,1]$.

   f admet sur $[0,1]$ une fonction réciproque h définie sur $I = [-1,1]$.

   b) On a : $h(x) = y, x \in I = [-1,1] \Leftrightarrow f(y) = x, y \in [0,1]$.

   $f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} - y = x \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} = y + x \Leftrightarrow 1-y^2 = (y+x)^2 \Leftrightarrow 1-y^2 = y^2 + x^2 + 2xy$

   $\Leftrightarrow 2y^2 + 2xy + x^2 - 1 = 0$. il s'agit d'une équation du second degré d'inconnue y.

   $\Delta = 4x^2 - 8(x^2-1) = 8 - 4x^2$.

   $y_1 = \dfrac{-2x-\sqrt{8-4x^2}}{4} = \dfrac{-x-\sqrt{2-x^2}}{2}$ et $y_2 = \dfrac{-2x+\sqrt{8-4x^2}}{4} = \dfrac{-x+\sqrt{2-x^2}}{2}$.

   On voit tout de suite que pour $x = 0$, $y_1 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \prec 0$ et donc $h(x) = y_2 = \dfrac{-x+\sqrt{2-x^2}}{2}$.

4. a) La fonction g_n est dérivable sur $[0,1[$ et $g_n'(x) = f'(x) - n x^{n-1} \prec 0$

La fonction g_n est continue et elle est strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle réalise une bijection de $[0,1]$ sur $g_n\langle[0,1]\rangle = [g_n(1), g_n(0)] = [-2,1]$ et comme $0 \in g_n\langle[0,1]\rangle$ alors l'équation $g_n(x)=0$ admet dans $[0,1]$ une solution unique a_n.

Remarquons que $g_n(1) = -2 \neq 0$ et $g_n(0)=1\neq 0$ donc a_n est distinct de 0 et 1 et par suite $a_n \in]0,1[$.

Conclusion l'équation $f(x)=x^n$, a une seule solution a_n dans $]0,1[$ et on a $g_n(a_n)=0$.

b) $g_n(x)-g_p(x) = f(x)-x^n-f(x)+x^p = x^p-x^n = x^p\left(1-x^{n-p}\right)$. or $x \in]0,1[$ et $n-p \succ 0$ donc $x^{n-p} \prec 1$ et par suite $g_n(x)-g_p(x)\succ 0 \Leftrightarrow g_n(x)\succ g_p(x)$.

c) on a en particulier puisque $n+1\succ n$, $g_{n+1}(x)\succ g_n(x)$ pour tout réel $x\in]0,1[$. $a_n \in]0,1[$ donc $g_{n+1}(a_n)\succ g_n(a_n) \Leftrightarrow g_{n+1}(a_n)\succ 0 \Leftrightarrow g_{n+1}(a_n)\succ g_{n+1}(a_{n+1})$ et comme la fonction g_{n+1} est strictement décroissante sur $[0,1]$ alors $a_{n+1}\succ a_n$ et la suite (a_n) est croissante.

$a_n \in]0,1[$ donc (a_n) est majorée par 1 donc elle converge.

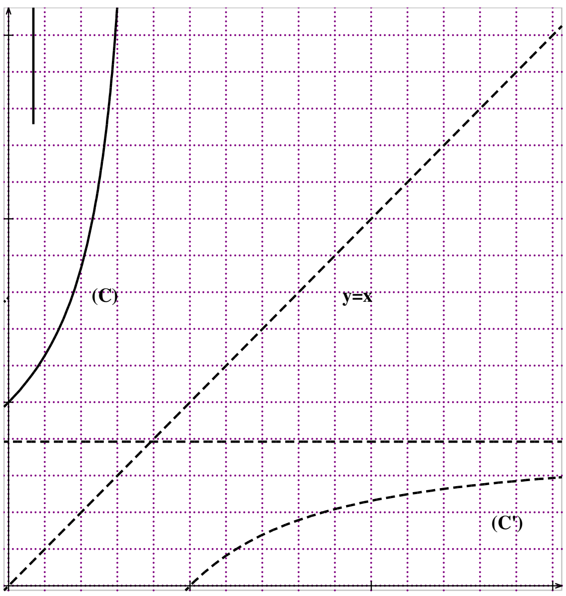
Exercice 4

1. a) Pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$, $tanx\neq 1$ donc *f* est dérivable sur *I* et $f'(x)=\dfrac{1+tan^2x}{(1-tanx)^2}\succ 0$. *f* est alors strictement décroissante sur *I*.

$\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{4}\right)^-} f(x)=+\infty$ et $f(0)=1$ donc $f\left\langle\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\right\rangle = [1,+\infty[$.

b) *f* est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $f\left\langle\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\right\rangle=[1,+\infty[$. La fonction réciproque de *f* existe et elle est définie sur $J=[1,+\infty[$.

c)



2. f est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ et f' ne s'annule pas sur cet intervalle alors f^{-1} est dérivable sur $J=[1,+\infty[$ et que pour tout x de J, on a : $\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}=\frac{(1-tany)^2}{1+tan^2 y}$ avec $y=f^{-1}(x)$

Or $y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow f(x)=y\Leftrightarrow\frac{1}{1-tany}=x\Leftrightarrow 1-tany=\frac{1}{x}\Leftrightarrow tany=1-\frac{1}{x}$. Ainsi

$$\left(f^{-1}\right)'(x)==\frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{1+\left(1-\frac{1}{x}\right)^2}=\frac{1}{x^2+(x-1)^2}=\frac{1}{2x^2-2x+1}.$$

4. a) f est continue et strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur son image $f\left\langle\left[0,\frac{\pi}{4}\right[\right\rangle=[1,+\infty[$. $n\in\mathbb{N}^*$ donc $n\in[1,+\infty[$ donc l'équation $f(x)=n$, admet dans I une solution unique qu'on note x_n. On a donc $f(x_n)=n$.

b) On a : $f(x_n)=n$ et $f(x_{n+1})=n+1$ ce qui donne $f(x_{n+1})\succ f(x_n)$ et comme f est strictement croissante sur I alors $x_n\prec x_{n+1}$ la suite (x_n) est croissante et comme $x_n\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$ alors elle est majorée par $\frac{\pi}{4}$ donc converge .

c) On a $f(x_n)=n\Leftrightarrow x_n=f^{-1}(n)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{-1}(x)=\frac{\pi}{4}$ donc la suite (x_n) converge vers $\frac{\pi}{4}$.

Exercice5

1. a) φ est restriction à $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ d'une fonction dérivable en tout réel non nul donc φ est dérivable sur cet intervalle et $\varphi'(x)=\frac{-x-1+x}{x}-cos\,x=\frac{-1}{x}-cos\,x\prec 0$ puisque sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ la fonction cosinus et positive.

φ est alors strictement décroissante sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\varphi\left\langle\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right\rangle=\left[\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right),\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)\right[=\left[\frac{2}{\pi}-2,+\infty\right[$.

b) l'équation $f(x)=x$, $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ est équivalente à l'équation $\frac{1}{1+sin\,x}=x$.

Or $\frac{1}{1+sin\,x}=x\Leftrightarrow(1+sin\,x)x=1\Leftrightarrow x\,sin\,x=1-x\Leftrightarrow sin\,x=\frac{1-x}{x}\Leftrightarrow\varphi(x)=0$.

On a φ est continue sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ et elle est strictement décroissante donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur $\varphi\left\langle\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right\rangle=\left[\frac{2}{\pi}-2,+\infty\right[$ et comme 0 appartient à $\varphi\left\langle\left]0,\frac{\pi}{2}\right]\right\rangle$ alors l'équation $\varphi(x)=0$ admet dans $\left]0,\frac{\pi}{2}\right]$ une solution unique α.

2. Pour x élément de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $0\le sinx\le 1\Rightarrow 1+sinx\ne 0$ et comme la fonction $x\mapsto 1+sinx$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors f est dérivable sur cet intervalle et $f'(x)=\frac{-cosx}{(1+sin\,x)^2}\le 0$, f est alors strictement décroissante sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et elle est continue donc $f\left\langle\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\rangle=\left[f\left(\frac{\pi}{2}\right),f(0)\right]=\left[\frac{1}{2},1\right]$.

f réalise donc une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ sur $f\left\langle\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right\rangle=\left[\frac{1}{2},1\right]$. Ainsi $J=\left[\frac{1}{2},1\right]$.

3. a) x un élément de J, $sin\left(f^{-1}(x)\right)=sin(y)$ avec $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $y=f^{-1}(x)$.

$y=f^{-1}(x)\Leftrightarrow x=f(y)\Leftrightarrow x=\frac{1}{1+sin\,y}\Leftrightarrow 1+sin\,y=\frac{1}{x}\Leftrightarrow sin\,y=\frac{1}{x}-1=\frac{1-x}{x}$. Ainsi

$sin\left(f^{-1}(x)\right)=\frac{1-x}{x}$.

$cos^2y=1-\left(\frac{1-x}{x}\right)^2=\frac{2x-1}{x^2}$ et comme $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ alors $cosy\ge 0$ et donc

$cosy=\sqrt{\frac{2x-1}{x^2}}=\frac{\sqrt{2x-1}}{|x|}=\frac{\sqrt{2x-1}}{x}$ car x est un élément de J.

b) $sin\left(f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{1-\frac{2}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2}$ et $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ donc $f^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{6}$.