Lycée Pilote Sfax Smaoui Sofiene	Série d'exercices N°18	4ème Math

1 1) Soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $h(x) = x - \ln(x)$.

a) Etudier les variations de h.

b) En déduire que pour tout x de $]0, +\infty[$, $h(x) \geq 1$.

2) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{t}{t - \ln t} dt$.

a) Montrer que pour tout t de $]0, +\infty[$, $\frac{t}{t - \ln t} \leq t$.

b) Montrer que la suite (V_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (V_n) est convergente et que $0 \leq \lim\limits_{n \to +\infty} V_n \leq \frac{1}{2}$.

3) Soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $W_n = \int_{1}^{n} \frac{t}{t - \ln t} dt$.

a) Montrer que pour tout t de $[1, +\infty[$, $\frac{t}{t - \ln t} \leq 1 + \ln(t)$.

En déduire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $W_n \leq n \ln(n)$.

b) Calculer $\int_{1}^{n} \left(1 + \frac{\ln t}{t}\right) dt$ puis montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 5$, $n \leq W_n \leq n \ln(n)$.

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$.

2 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln^2(x)$.

On note C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① Etudier f et tracer C.

② Soit $\alpha \in]0, 1]$.

a) Calculer, en fonction de α, l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du plan.

$\{M(x, y)$ tel que $\alpha \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)\}$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathcal{A}(\alpha)$.

③ Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$, $n \geq 2$ et $I_k = \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(t)\, dt$, $1 \leq k \leq n-1$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 2$ et $1 \leq k \leq n-1$, $\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq I_k \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 2$, $u_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \mathcal{A}\left(\frac{1}{n}\right) \leq u_n - \frac{1}{n} f(1)$.

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

d) Montrer alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\left(\ln^2(n) + \ln^2\left(\frac{n}{2}\right) + \ln^2\left(\frac{n}{3}\right) + \ldots + \ln^2\left(\frac{n}{n-1}\right) + \ln^2(1)\right) = 2$.