Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°16**	$4^{ème}$ M

1 On pose pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^n dt$ et $J_n = \int_0^1 t^2\left(1-t^2\right)^n dt$.

1) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $I_{n+1} = I_n - J_n$.

2) En integrant par parties, exprimer J_n en fonction de I_{n+1}.

3) Calculer I_{n+1} en fonction de I_n.

4) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n, $I_n = \dfrac{2^n n!}{1x3x5x.......(2n+1)}$.

2 I) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{1+x^2}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Etudier la fonction f et tracer C_f.

2) Soit F la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $F(x) = \int_0^{\tan x} \dfrac{dt}{1+t^2}$.

a) Montrer que F est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $F'(x)$.

b) Expliciter alors $F(x)$ pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

3) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par C_f, l'asymptote de C_f et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \sqrt{3}$.

II) On considère la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^1 \dfrac{dt}{\left(1+t^2\right)^n}, n \geq 0$.

1) Calculer I_0 et I_1.

2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = \dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{1}{2^n} + (2n-1)I_n\right)$.

III) On considère la suite (J_n) définie par $J_0 = \int_0^1 \dfrac{dt}{\left(1+t^2\right)}$ et $J_n = \int_0^1 \dfrac{t^{2n}}{\left(1+t^2\right)}dt, n \geq 1$.

1) a) Vérifier que pour tout n, $0 \leq J_n \leq \dfrac{1}{1+2n}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n$.

2) a) Montrer que pour tout n, $J_{n+1} + J_n = \dfrac{1}{1+2n}$.

b) Calculer J_1, J_2, et J_3.

3) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + ... + \dfrac{(-1)^n}{1+2n}$.

a) Montrer que pour tout n, $J_{n+1} = (-1)^n\left(U_n - J_0\right)$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.