Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n°10**	$4^{ème}$ Math

1 Soit f la fonction définie l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ par $f(x) = 1 + \sin(\pi x)$.

On désigne par **C** la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Montrer que **C** admet un point d'inflexion que l'on précisera.

c) Construire **C** et préciser la tangente au point d'inflexion.

② a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe représentative de la fonction réciproque de f.

③ a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$ et que pour tout $x \in]0, 2[$, $\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2x - x^2}}$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0, 2]$, $f^{-1}(2 - x) = -f^{-1}(x)$.

④ Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n+k}\right)$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{2n+1}{2n}\right) \leq u_n \leq \frac{n+1}{n} f^{-1}\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

b) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

c) Déterminer la limite de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(1 - \frac{1}{n+k}\right)$.

2 Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{4}, +\infty\right[$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1 + \tan x} & \text{si } x \in \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right] \\ 1 - x + \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x \in]0, +\infty[\end{cases}$.

On désigne par **C** la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

① a) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

b) Dresser le tableau de variation de f puis tracer **C**.

② On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe représentative de la fonction réciproque de g. Expliciter $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

③ On désigne par h la restriction de f à l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.

a) Montrer que h réalise une bijection de I sur un intervalle J' que l'on précisera.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J' et que pour tout $x \in J'$, $\left(h^{-1}\right)'(x) = \frac{-1}{2x^2 - 2x + 1}$.