Révision Synthèse 1

Bac Maths 2020-2021

Exercice 1 :

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1) $ABCD$ un parallélogramme de centre O. $S_{(AD)} o S_O = S_{(BC)}$ si et seulement si $ABCD$ est un losange.
2) On donne les points $A(1,1)$, $B(2,0)$, $C(3,-1)$, $D(1,5)$ et $E(0,6)$. Si f est une isométrie telle que $f(A)=D$ et $f(B)=E$ alors $f(C)$ est le barycentre des points pondérés $(D,1)$ et $(E,-2)$.
3) Si I est le milieu de $[AB]$ alors $S_{(IB)} o t_{\overrightarrow{AI}} o S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{IB}}$.
4) Si f est une isométrie qui ne fixe aucun point alors fof est une translation.
5) $ABCD$ un carrée, l'isométrie $S_{(AD)} o S_{(AB)} o S_{(BC)}$ est la symétrie glissante de vecteur $2\overrightarrow{BA}$ et d'axe (AB).
6) Δ et $\mathscr{D}$ deux droites perpendiculaires. Si f et g deux symétries glissantes d'axes respectifs Δ et $\mathscr{D}$ alors fog est une symétrie centrale.
7) La composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale est une symétrie glissante.
8) $ABCD$ est un rectangle alors $S_{(AB)} o S_{(BC)} o S_{(CD)} o S_{(AD)}$ est une translation.
9) ABC est un triangle équilatéral. f une isométrie telle que $f(A)=B$, $f(B)=C$ et $f(C)=A$ alors $fofof$ est l'identité du plan.

Exercice 2

$ABCD$ est un losange tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[AD]$ et $[BD]$. On note Δ et Δ' les médiatrices respectives de $[AB]$ et $[CD]$.

1) Soit f l'isométrie définie par $f(A)=B$, $f(B)=D$ et $f(D)=C$. Montrer que f est une symétrie glissante.
2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
   a) Montrer que $f = R o S_{\Delta}$.
   b) A-t-on $f = S_{\Delta} o R$.
3) En décomposant R, montrer que $f = S_{(BC)} o T$ où T est une translation dont on précisera le vecteur.
4) Soit $g = t_{\overrightarrow{LA}} o f$. Déterminer $g(O)$ et $g(I)$. Caractériser alors g.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle rectangle en A et isocèle tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

Soit I le milieu de [BC].

1. Soit f une isométrie telle que $f(\{B,C\}) = \{B,C\}$. Montrer que f fixe I. En déduire les isométries f qui vérifient $f(\{B,C\}) = \{B,C\}$. Quelles sont celles qui laissent ABC globalement invariant.
2. Soit $D = S_{(BC)}(A)$ et g une isométrie qui transforme $\{A,B,D\}$ en $\{A,C,D\}$
   a) Montrer que g(B) = C et que g laisse I invariant.
   b) Déterminer les isométries g.
3. a) Soit Δ la médiatrice [BD]. Caractériser l'isométrie $r = S_{(AD)} \circ S_{\Delta}$.
   b) Soit M et N les points tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BN} = \alpha\overrightarrow{BD}$ où $\alpha > 0$. Montrer que $r(M) = N$. En déduire que la médiatrice de [MN] passe un point fixe.
4. a) Montrer que $S_{\Delta} \circ S_{(AB)}$ est une translation dont on précisera le vecteur.
   b) En déduire la forme réduite de l'isométrie $\varphi = r \circ S_{(AB)}$.
5. Caractériser l'isométrie $r_{\left(A,\frac{\pi}{2}\right)} \circ S_{(AB)}$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que : $f(0) = 0$ et pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1) Montrer que f est impaire.
2) Pour $x \geqslant 1$, on pose $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x}$.
   a) Etudier le sens de variation de g.
   b) En déduire que f admet une limite finie l en $+\infty$.
3) Pour $x \geqslant 1$, on pose $\varphi(x) = f(x) + f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
   a) Montrer que φ est dérivable sur $[1,+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.
   b) Montrer que $l = 2f(1)$.
4) Pour $x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ on pose $h(x) = f(\tan x)$.
   a) Calculer la limite de h à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.
   b) Montrer que pour tout $x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $h(x) = x$.
   c) Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ de f.
5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, f étant infiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note $f^{(n)}$ la dérivée n-ième de f.
   a) Montrer que pour tout réel x : $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$.
   b) Montrer que pour tout réel x et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
   $(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + 2(n+1)xf^{(n+1)}(x) + n(n+1)f^{(n)}(x) = 0$.

Exercice 5 :

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in IN^*$: $U_n = \left(1 - \dfrac{1}{2n}\right)U_{n-1}$.

1°/Montrer que pour tout $n \in IN$: $U_n > 0$.

2°/Soit (V_n) définie sur IN par : $V_n = \sqrt{n+1}\,U_n$.

a- Exprimer : $V^2_{n+1} - V^2_n$ en fonction de n et de U^2_n.

b- Déduire que (V_n) est décroissante et que pour tout $n \in IN$: $U_n \leq \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}$.

3°/ Soit (W_n) la définie sur IN par : $W_n = \sqrt{n}\,U_n$.

a- Montrer que (W_n) est croissante.

b- Déduire que pour tout $n \in IN^*$: $U_n \geq \frac{1}{4\sqrt{n}}$.

4°/ Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5°/a- Calculer U_n en fonction de n.

b-En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2}$.