Lycée 18 Janvier Djebniana

Série N°18

Thème : Isométries

Niveau : Bac Math. | Année Scolaire : 2019-2020

Prof : BenMbarek Mahmoud

Exercice N° 1 ★★

Répondre par **vrai** ou **faux** en justifiant :

1. Si Δ est laxe d'une symétrie f alors pour tout point $M \in \Delta$ on a : $f(M) = M$
2. Si une isométrie f n'admet aucun point invariant alors f est une symétrie glissante.
3. Si f est une isométrie qui n'admet aucun point fixe alors $f \circ f$ est une translation.
4. $S_\Delta \circ S'_\Delta = S'_\Delta \circ S_\Delta \Leftrightarrow \Delta \perp \Delta'$
5. Toute rotation $R_{(I;\alpha)}$ se décompose d'une manière unique sous la forme $R = S_{(Iy)} \circ S_{(Ix)}$ avec $2(\widehat{\overrightarrow{IX}, \overrightarrow{Iy}}) \equiv \alpha[2\pi]$
6. Si une isométrie f fixe deux points distincts A et B alors $f = S_{(AB)}$.
7. $ABCD$ étant un parallélogramme de centre O. $S_{(AD)} \circ S_O = S_{(BC)}$ si et seulement si $ABCD$ est losange.
8. Dans le plan orienté, on considère les points $A(1;1)$, $B(2;0)$, $C(3;-1)$, $E(1;5)$ et $F(0;6)$. Si f est une isométrie telle que $f(A) = E$ et $f(B) = F$ alors $f(C)$ est le barycentre des points pondérés $(E;1)$ et $(F;-2)$.
9. I est le milieu du segment $[AB]$. $S_{(IB)} \circ t_{\overrightarrow{AI}} \circ S_{(AB)} = t_{\overrightarrow{IB}}$
10. Soit $ABCD$ un carré. L'isométrie $S_{(AD)} \circ S_{(AB)} \circ S_{(BC)}$ est la symétrie glissante d'axe (AB) et de vecteur $2\overrightarrow{BA}$
11. Soient Δ et Δ' deux droites perpendiculaires. Si f et g sont deux symétries glissantes d'axes respectifs Δ et Δ' alors $f \circ g$ est une symétrie centrale.

Exercice N° 2 ★★★

On considère un triangle ABC isocèle en A.
On désigne par D l'image de B par la symétrie Orthogonale d'axe (AC) et par I le milieu du segment $[BC]$.

Soit f une isométrie laissant A invariant et transformant B et C respectivement en C et D. On pose $g = S_{(AC)} \circ f$.

1. Déterminer $g(A)$, $g(B)$, $g(C)$ et $g(I)$.

(2) Montrer que g est une symétrie orthogonale

Exercice N° 3 ★★★

Soit ABC un triangle équilatéral direct. On désigne par I le milieu de $[AC]$ et par Δ la droite passant par B et parallèle à (AC).Soit J un point de $[BA]$ distinct de B.

La droite passant par J et parallèle à (AC) coupe $[BC]$ en un point K.

(1) Caractériser : $S_{(AC)} \circ S_{\Delta}$ et $S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$

(2) Identifier : $f = S_{(AC)} \circ S_{\Delta} \circ S_{(KJ)} \circ S_{(AC)}$

(3) Déterminer la position du point J sur $[BA]$ pour que f soit la translation de vecteur $\overrightarrow{CJ}$

Exercice N° 4 ★★★

Soit OAB un triangle équilatéral direct. On désigne par Δ la droite perpendiculaire à (OA) en O, par $\mathscr{D}$ la médiatrice de $[AB]$ et par S_1 ;S_2 ;S_3 et S_4 les symétries orthogonales d'axes respectifs (OA), (OB), Δ et $\mathscr{D}$. On note : $f = S_3 \circ S_2 \circ S_1$

(1) Montrer que : $f = S_3 \circ R$ où R est une rotation que l'on caractérisera.

(2) Montrer que : $R = S_3 \circ S_4$

(3) Identifier f

Exercice N° 5 ★★★

$ABCD$ un carré direct. Δ est la médiatrice du segment $[BC]$. Soit f une isométrie distincte de la symétrie S_{Δ} et telle que $f(B) = C$ et $f(D) = A$

(1) (a) Montrer que le point $O = B \star D$ est invariant par f et que c'est l'unique point du plan invariant par f.

(b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f.

(2) Soit $g = f \circ S_{\Delta}$ et $\varphi = S_{\Delta} \circ f$

(a) Trouver $g(A)$ et $g(C)$. En déduire g.

(b) Montrer que $\varphi = S_{(BD)}$.

(c) En déduire la nature de $g \circ \varphi$.

Exercice N° 6 ★★★

$ABCD$ est un losange tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. On désigne par I ; J ; K ; L et O les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$,$[DA]$ et $[BD]$. On note Δ la médiatrice du segment $[AB]$ et Δ' celle de $[CD]$.

(1) Soit f l'isométrie définie par : $f(A) = B$; $f(B) = D$ et $f(D) = C$.

(a) Montrer que f n'admet pas des points fixes.

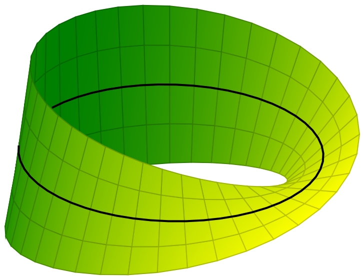
(b) Déduire la nature de f.

(2) Soit R la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

- **a** Montrer que $f = R \circ S_{\Delta}$
- **b** A-t-on $f = S_{\Delta} \circ R$. (Justifier)

3
- **a** Définir l'isométrie h telle que $R = S_{(BC)} \circ h$.
- **b** En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = S_{(BC)} \circ T$ où T est une translation à préciser.

4 Soit $T' = t_{\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}}$ et on pose $g = \left(T'\right)^{-1} \circ f$
- **a** Déterminer : $g(D)$, $g(I)$ et $g(O)$
- **b** En déduire la nature et les éléments caractéristiques de g.
- **c** Montrer que $f = T' \circ g$.



« Donnez-moi un point fixe et un levier et je soulèverai la terre .... »
[Archimède]