Mr : Chahed **Série (fonction réciproque)** **4eme math**

Exercice 1 :

Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{4}\right[$ par $h(x) = \frac{1}{1-\tan(x)}$

1) Montrer que h réalise une bijection de $[0\frac{\pi}{4}[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note φ sa réciproque.
2) Montrer que φ est dérivable sur J et pour tout $x \in J$ on a : $\varphi'(x) = \frac{1}{2x^2-2x+1}$.
3) Soit Ψ la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par : $\Psi(x) = \varphi\left(\frac{2x-1}{2x-2}\right)$ si $x > 1$ et $\Psi(1) = \frac{\pi}{4}$.
   a) Montrer que Ψ est continue sur $[1,+\infty[$
   b) Montrer que Ψ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que pour tout $x \in]1,+\infty[$ on a : $\Psi'(x) = -\varphi'(x)$.
   c) En déduire que pour tout $x \in [1,+\infty[$ on a : $\Psi(x) + \varphi(x) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2

I) Soit g la fonction définie sur ℝ par $g(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+2}}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1)a) Montrer que pour tout x∈ ℝ on a $g'(x) = \frac{1-x}{\sqrt{2(x^2+1)^3}}$

b) Dresser le tableau de variation de g et tracer $\mathcal{C}$ c) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$ on a : $|g'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

2) soit (u_n) la suite définie sur ℕ par $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq u_n \leq 1$ b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|u_{n+1} - 1| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}|u_n - 1|$

c) Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite

II) Soit U la fonction définie sur $I = [0,\pi]$ par $u(x) = \cos(x)$Et V la fonction définie sur $I' = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $V(x) = \tan(x)$

1)a) Montrer que U réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que V réalise une bijection de I' sur un intervalle J' que l'on précisera

2)a) Montrer que U^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et que pour tout $x \in]-1,1[$ on a $(u^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

b) Montrer que V^{-1} est dérivable sur ℝ et que pour tout x∈ ℝ on a $(V^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3) Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par $f(x) = U^{-1}og(x)$

a) Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que $f'(x) = (V^{-1})'(x)$

b) En déduire que pour $x \in]1,+\infty[$ $f(x) = V^{-1}(x) - \frac{\pi}{4}$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité à droite en 1 ?

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]-1,1]$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. 1/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter

2/ a) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$ on a :$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2 f(x)}$

b) Dresser le tableau de variation de f puis construire sa courbe $\mathcal{C}$.

c) Montrer que f réalise une bijection de $]-1,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3/ a) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$ b) Construire sa courbe $\mathcal{C}'$ dans le même repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$

B) 1/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1,1]$ une solution unique Vérifier que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{5}$

2/ Montrer que pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$ alors $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right]$ puis déduire que $|f'(x)| \leq \frac{8}{9}$

3/ Soit U la suite définie sur ℕ par : $\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{3}{5}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{8}{9}|U_n - \alpha|$En déduire que la suite U est convergente et calculer sa

Exercice 4

Soit g la fonction définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ par $g(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$

1/ a) Dresser le tableau de variation de g .En déduire que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J qu'on déterminera.

b) Calculer $g^{-1}(0)$ et $g^{-1}(1)$

c) Montrer que g^{-1} est dérivable sur J et que pour tout $x \in J$: $(g^{-1})'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$

2/ Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ une solution unique α et Vérifier que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

A) Soit h la fonction définie sur $[0,1[$ par $h(x) = g^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

1/ Montrer h est dérivable sur $[0,1[$ et calculer h'(x) En déduire que pour tout $x \in [0,1[$ $g^{-1}(x) - g^{-1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{\pi}{2}$

2/ Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g^{-1}\left(\alpha + \frac{1}{n+k}\right)$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\left(1+\frac{1}{n}\right) g^{-1}\left(\alpha+\frac{1}{n}\right) \leq V_n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right) g^{-1}\left(\alpha+\frac{1}{2n}\right)$

b) En déduire que la suite V est convergente et calculer sa limite

Exercice 5

I) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

1) a) Dresser le tableau de variation de g

b) Ecrire une équation de la tangente T a $\mathcal{C}$ au point O Etudier la position de T et $\mathcal{C}$. Conclure

2) a) Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Expliciter $g^{-1}(x)$ pour $x \in$ J puis tracer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ la courbe de g^{-1}

2) Soit h la fonction définie sur $I' = \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ par $h(x) = \tan(x)$

a) Montrer que h réalise une bijection de I' sur un intervalle J' que l'on précisera

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $(h^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

3) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = h^{-1}og(x)$

Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$et que $\varphi'(x) = \frac{1}{2}(h^{-1})'(x)$En déduire que pour $x \in \mathbb{R}$ $\varphi(x) = \frac{1}{2}h^{-1}(x)$

Exercice 6

I) Soit g la fonction définie sur $[0\pi]$ par $g(x) = \cos x$

1) a) Montrer que g réalise une bijection de $[0\pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $]-1,1[$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

2) Soit f la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = g^{-1}(sin^2(x))$

a) Montrer que est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et que $f'(x) = \frac{-2\sin(x)}{\sqrt{1+\sin^2(x)}}$

b) Soit $x \in \left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ montrer que pour tout $t \in \left[x,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $\frac{-2}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} \leq f'(t) \leq \frac{-2\sin(x)}{\sqrt{2}}$

puis que $\frac{-2}{\sqrt{1+\sin^2(x)}} \leq \frac{f(x)-f(\frac{\pi}{2})}{x-\frac{\pi}{2}} \leq \frac{-2\sin(x)}{\sqrt{2}}$c) En déduire que f est dérivable a gauche en $\frac{\pi}{2}$

3) a)Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ b) Vérifier que $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$

4) Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $h(x) = fof(x)$Et soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{\pi}{4} \\ u_{n+1} = h(u_n) \end{cases}$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 < u_{n+1} \leq u_n < \alpha$ en déduire que (u_n) est convergente

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ on a $h(x) = g^{-1}(1 - sin^4(x))$

c) Montrer que les solutions de l'équation $h(x) = x$ sont $0, \alpha\ et \frac{\pi}{2}$ .Déterminer alors la limite de (u_n)

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ 0 \quad si & x = 0 \end{cases}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a) Montrer que f est dérivable en 0 et écrire une équation de la tangente T a $\mathcal{C}$ au point O

b) Etudier la position de T et $\mathcal{C}$. Conclure

c) Dresser le tableau de variation de f et tracer T et $\mathcal{C}$

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera
   b) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour $x \in \mathrm{J}$ puis tracer $\mathcal{C}'$ la courbe de f^{-1}

3) soit $(\mathrm{u_n})$ et $(\mathrm{a_n})$ les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} \mathrm{u}_0 = 1 \\ \mathrm{u}_{n+1} = \mathrm{f}\left(\frac{1}{\mathrm{u_n}}\right) \end{cases}$ et $\mathrm{a_n} = \frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$

a) Vérifier que pour tout $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a $f(tan(\theta)) = tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ et $tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \frac{1}{tan(\theta)}$

b) Vérifier que $\mathrm{a}_{n+1} = 2^{n+1} - \mathrm{a_n}$

c) Montrer que pour tout $\mathrm{n} \in \mathbb{N}$ on a $\mathrm{u_n} = tan\left(\pi \frac{a_n}{2^{n+2}}\right)$ puis déduire la limite $(\mathrm{u_n})$

Exercice 8

Soit g la fonction définie sur $\mathrm{I} = \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ par $\mathrm{g(x) = tan\,(x)}$

1) a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera

b) Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $\mathrm{x} \in \mathbb{R}$ on a $(\mathrm{g}^{-1})'(\mathrm{x}) = \frac{1}{1+\mathrm{x}^2}$

2) Soit h la fonction définie sur $[-1\,,+\infty[$ par $h(x) = \begin{cases} \mathrm{g}^{-1}\left(\frac{x}{x+1}\right) & si\ x > -1 \\ -\frac{\pi}{2} & si\ \ x = -1 \end{cases}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative

Dans un repère orthonormé $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

a) Montrer que h est continue sur $[-1\,,+\infty[$

b) Montrer que h est dérivable sur $]-1\,,+\infty[$ et calculer $h'(x)$

3) a) Etudier les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \frac{1}{2x^2+2x+1}$

b) Soit $\in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$, montrer que pour tout $t \in [-1, x]$ on a $1 \leq h'(t) \leq \frac{1}{2x^2+2x+1}$

c) En déduire que pour tout $x \in \left]-1, -\frac{1}{2}\right[$ on a $(x+1) \leq h(x) + \frac{\pi}{2} \leq \frac{x+1}{2x^2+2x+1}$

d) Montrer alors que h est dérivable à droite en -1 et calculer $h_d{}'(-1)$.
Ecrire une équation de la demi-tangente T a $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1

4) Sur la figure annexe on a tracé la courbe de la fonction φ définie sur$[-1\,,+\infty[$ par $\varphi(x) = h(x) - x - 1 + \frac{\pi}{2}$

a) Déterminer graphiquement le signe de $\varphi(x)$ puis déduire la position relative de T et $\mathcal{C}$

b) Dresser le tableau de variation de h et tracer $\mathcal{C}$

c) Montrer que h est une bijection de $[-1\,,+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera et expliciter $h^{-1}(x)$

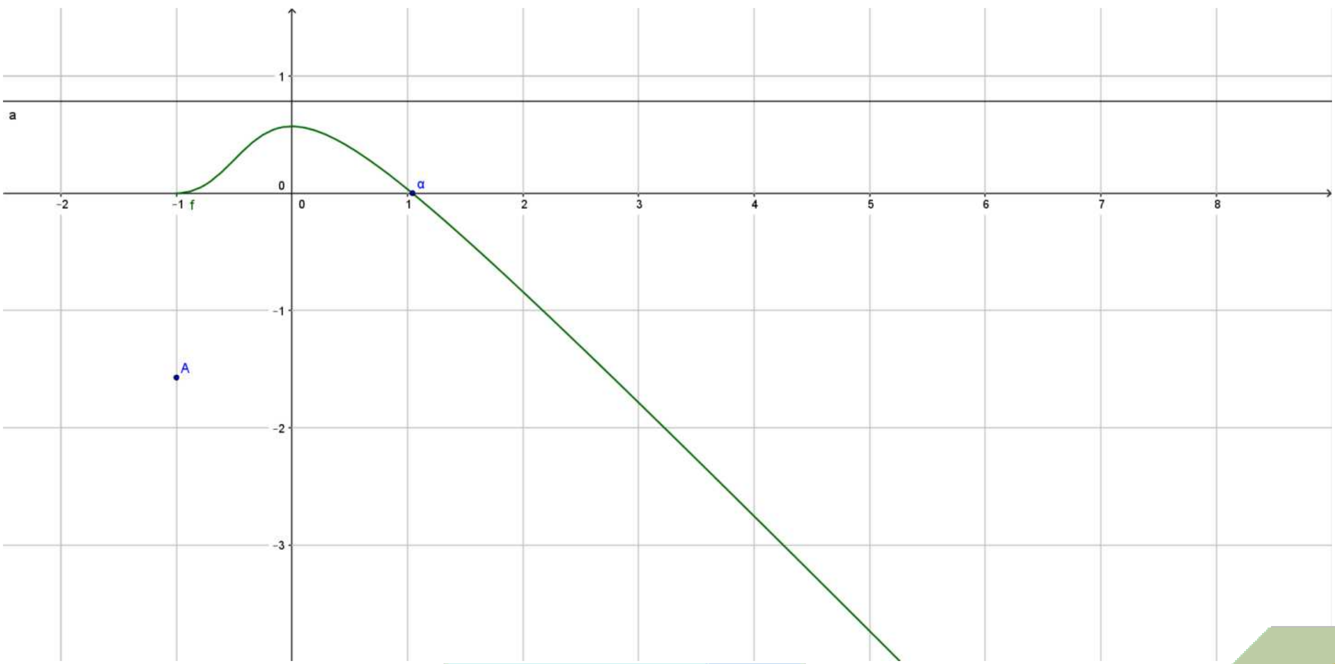
5) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'equation $z^2 - (2+6i)z - 4 + 6i = 0$

6) On pose $u = 1 + 5i$, $= 1 + i$, $w = 239 - i$, $\alpha = \mathrm{g}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right)$ et $\beta = \mathrm{g}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right)$

a) Vérifier que $u^4 v = 4w$

b) Exprimer un argument de u en fonction de α et un argument de w en fonction de β

c) En déduire que $4\mathrm{g}^{-1}\left(\frac{1}{5}\right) - \mathrm{g}^{-1}\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}$



Exercice 9

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(0, \vec{i}, \vec{j}\right)$

1) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Montrer que $\Delta: y = -2x$ est une asymptote a $\mathcal{C}$ et étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ ·

c) Tracer $\mathcal{C}$ on précisera la tangente a $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0

2) a) Montrer que f réalise une bijection de R sur un intervalle J que l'on précisera

b) Expliciter $f^{-1}(x)$ et tracer sa courbe

3) Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = xf^{-1}(x)$

a) Vérifier que pour tout $x \in$ R on a $f'(x) = -\frac{f(x)}{x+f(x)}$

b) Montrer que $x \in]0, +\infty[$ on $g'(x) = -x$

c) Retrouver alors l'expression de $f^{-1}(x)$