

Exercice n°1 :

Soit l'application $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}_+ : x \mapsto \sqrt{\tan x}$

- 1) Etudier les variations de f .
- 2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g défini sur $\mathbb{R}$.
b) Etudier la dérivabilité de g et déterminer sa fonction dérivée.
b) Calculer $g(0)$ et $g(1)$. Tracer les courbes représentatives de f et g dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 3) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : g(x) + g\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
- 4) Soit la fonction h défini sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$ par $h(x) = g\left(\frac{1}{\cos \pi x}\right)$.
a) Montrer que h est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$. Donner le tableau de variations de h .
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(\cos \pi x) - \frac{\pi}{4}}{x}$.

Exercice n°2:

Soit f la fonction définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = 2(1 + \cos \pi x)$.

- 1- Dresser le tableau de variations de f .
- 2-a- Montrer que f réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $[0, 4]$.
b- Soit g la fonction réciproque de f , montrer que g est dérivable sur $]0, 4[$ et que $g'(x) = \frac{-1}{\pi \sqrt{4x - x^2}}$.
- 3- Soit h la fonction définie sur $[0, 4]$ par : $h(x) = g(x) + g(4 - x)$.
a- Montrer que h est continue sur $[0, 4]$.
b- Montrer que h est dérivable sur $]0, 4[$ et calculer $h'(x)$.
c- Calculer $h(0)$ et en déduire que pour tout $x \in [0, 4]$: $g(4 - x) = 1 - g(x)$.

Exercice n°3:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{1 + x^2}}$

- 1-a- Dresser le tableau de variation de f .
b- Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0 puis étudier la position de C_f par rapport à T .
c- Tracer C_f et T dans un r.o.n $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 2- Soit g la restriction de f à $[0, +\infty[$.
a- Montrer que g réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $[0, 1[$.
b- Construire la courbe de g^{-1} et montrer que pour tout $x \in [0, 1[$: $g^{-1}(x) = \frac{2x}{1 - x^2}$.
- 3- Soit h la fonction définie sur $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ par $h(x) = \sqrt{1 - g^{-1}\left(\tan \frac{x}{2}\right)}$
a- Vérifier que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$: $h(x) = \sqrt{1 - \tan x}$.
b- Montrer que h réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
c- Montrer que h^{-1} est dérivable sur J et calculer $(h^{-1})'(x)$ pour tout $x \in J$.

Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \frac{2 \sin x}{1 - \sin x}$

(ζ) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1- Etudier f et tracer (ζ).

2-a- Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$. Déterminer $g(0)$ et $g(2)$.

b- Tracer la courbe représentative (ζ') de g dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

c- En déduire la position de (ζ') par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

d- Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $g'(x) = \frac{1}{(2+x)\sqrt{1+x}}$

3- Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$

a- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n$

b- Montrer que (u_n) est décroissante.

c- En déduire que (u_n) est convergente et donner sa limite.

4- Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = n \left[g\left(u_n + \frac{2}{n}\right) - g\left(u_n + \frac{1}{n}\right) \right]$.

On admet que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, il existe $c_n \in \left] u_n + \frac{1}{n}, u_n + \frac{2}{n} \right[$ tel que $v_n = \frac{1}{(2+c_n)\sqrt{1+c_n}}$

Montrer que (v_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice n° 5:

Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$.

I- 1-a- Montrer que f est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer $f'(x)$.

b- Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

2-a- Montrer que f réalise une bijection de $]0, 1[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3- Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ les courbes respectives de f et de f^{-1} réciproque de f dans un r.o.n $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4-a- f^{-1} est-elle dérivable à droite en 0 ? justifier.

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

II- Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on pose : $g(x) = f\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

1-a- Montrer que pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $g(x) = \sqrt{2 \frac{\cos x}{\sin x}}$.

b- Montrer que g n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

c- Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et que : $g'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x \sqrt{2 \frac{\cos x}{\sin x}}}$.

2- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$.

3- Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $(g^{-1})'(x) = \frac{-4x}{x^4 + 4}$.



Exercice n° 1:

Soit f la fonction définie sur $]0,1]$ par : $f(x) = \sqrt{\frac{1-x^2}{x}}$

I- 1-a- Montrer que f est dérivable sur $]0,1[$ et calculer $f'(x)$.

b- Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

2-a- Montrer que f réalise une bijection de $]0,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3- Tracer C_f et $C_{f^{-1}}$ les courbes respectives de f et de f^{-1} réciproque de f dans un r.o.n $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4-a- f^{-1} est elle dérivable à droite en 0 ? justifier.

b- Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.

II- Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ on pose : $g(x) = f\left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)$.

1-a- Montrer que pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$: $g(x) = \sqrt{2 \frac{\cos x}{\sin x}}$.

b- Montrer que g n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

c- Montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que : $g'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x \sqrt{2 \frac{\cos x}{\sin x}}}$.

2- Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $\mathbb{R}_+$.

3- Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $(g^{-1})'(x) = \frac{-4x}{x^4 + 4}$.

4- Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = g^{-1}(\sqrt{2x}) + g^{-1}\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$.

a- Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $h'(x)$.

b- Calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$ et montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$: $h(x) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice n°2:

I- Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1+x^2}}$ et C la courbe de f dans un r.o.n. $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1+x^2}^3}$.

2- Dresser le tableau de variations de f .

3- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1, 1[$.

4- Tracer C et C' la courbe de f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5- Montrer que pour tout $x \in] -1, 1[$: $f^{-1}(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$.

II- Soit g la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par : $g(x) = 1 + f^{-1}(\sin x)$.

1- Montrer que pour tout $x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $g(x) = 1 - \tan(x)$.



3- Montrer que g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(g^{-1})'(x) = \frac{-1}{1+(x-1)^2}$.

III- Soit h la fonction définie sur $] -\infty, 0[$ par : $h(x) = g^{-1}(x+1) + g^{-1}\left(\frac{1}{x}+1\right)$.

1- Montrer que h est dérivable sur $] -\infty, 0[$ et déterminer $h'(x)$.

2- Calculer $h(-1)$ et en déduire que pour tout $x \in] -\infty, 0[$: $h(x) = \frac{\pi}{2}$.

3- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les suites $U_n = \sum_{k=1}^n \left[g^{-1}\left(\frac{1}{k}\right) + g^{-1}\left(\frac{-1}{k}\right) \right]$ et $V_n = \frac{U_n}{n}$.

a- Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$: $h\left(\frac{-k}{k+1}\right) = g^{-1}\left(\frac{1}{k+1}\right) + g^{-1}\left(\frac{-1}{k}\right)$.

b- Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U_n = (n-1)\frac{\pi}{2} + g^{-1}\left(\frac{-1}{n}\right)$.

c- En déduire que la suite (V_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice n°3:

I Soit f la fonction définie sur $]0, 1[$ par : $f(x) = 2 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

1-a- Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1 et interpréter le résultat graphiquement.

b- Montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, $f'(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

c- Dresser le tableau de variations de f .

2-a- Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur $] -\infty, 2[$.

b- Expliciter $g(x)$ pour tout $x \in] -\infty, 2[$.

3- Tracer la courbe (C) de f et la courbe (C') de g sur le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4- On admet que pour tout $x \in]0, 1[$: $f'(x) \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0, 1[$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$.

II Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x) = f(\cos x)$.

1- Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$: $h(x) = 2 - \tan x$.

2- Montrer que h réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $] -\infty, 2[$ et déterminer $h^{-1}(1)$.

3- Montrer que h^{-1} est dérivable sur $] -\infty, 2[$ et que : $(h^{-1})'(x) = \frac{-1}{1+(2-x)^2}$.

