Lycée Pilote de Sfax *A/S 2019-2020*	*Série N°6* *Dérivabilité*	*Mr : Mourad EL arbi* *$4^{ème}$ Math$_4$*

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = 2 + \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{si } x \in \left]-\infty, -1\right] \\ f(x) = \dfrac{2\left(\sqrt{x+2}-1\right)}{x+1} & \text{si } x \in \left]-1, +\infty\right[\end{cases}$

On désigne par C_f la courbe de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

① Montrer que f est continue en -1.

② Déterminer la nature des branches infinies de C_f.

③ Montrer que f est strictement décroissante sur chacun des intervalles $\left]-\infty, -1\right]$ et $\left]-1, +\infty\right[$.

④ Etudier la dérivabilité de f en -1 et interpréter le résultat graphiquement.

⑤ Tracer C_f.

2 Soit f la fonction définie sur $\left[0, +\infty\right[$ par $\begin{cases} f(0) = \dfrac{\pi^2}{2} \\ f(x) = \dfrac{1-\cos\left(\pi\sqrt{x}\right)}{x} & \text{si } x \in \left]0, 1\right] \\ f(x) = \sqrt{x^2+x+2} & \text{si } x \in \left]1, +\infty\right[\end{cases}$.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

① a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Montrer que f est continue sur $\left[0, +\infty\right[$.

② a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Montrer que f est dérivable sur $\left]0, 1\right]$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]0, 1\right]$.

c) f est-elle dérivable en 1 ?

③ a) Montrer que f est strictement croissante sur $\left]1, +\infty\right[$.

b) Déterminer la nature de la branche infinie de C_f au voisinage de $+\infty$.

c) Dans l'annexe (I) on a tracé la demi-tangente à C_f au point d'abscisse 0.

Tracer C_f sachant que f est strictement décroissante sur $[0,1]$.

④ Dans l'annexe (II) on a tracé la courbe C_g d'une fonction g définie sur $\left[0, +\infty\right[$ dans un repère $\left(O', \vec{u}, \vec{v}\right)$.

C_g admet une branche parabolique de direction celle de $\left(O', \vec{v}\right)$ au voisinage de $+\infty$.

Soit h la fonction définie sur $\left[0, +\infty\right[$ par $h(x) = f \circ g(x)$ et C_h sa courbe dans le repère $\left(O', \vec{u}, \vec{v}\right)$.

a) Montrer que h est continue sur $\left[0, +\infty\right[$.

b) Montrer que h est strictement croissante sur $\left]0, +\infty\right[$.

c) Montrer que h est dérivable à droite en 0.

d) Etudier la nature de la branche infinie de C_h au voisinage de $+\infty$.

e) Montrer que pour tout $x \in \left[1, +\infty\right[$, $f(x) > x$.

f) En déduire la position relative

g) Tracer, dans l'annexe