Exercice 1:

I)QCM :Une seule réponse est correcte.

1)L'approximation affine pour x proche de 0 de $\sin(\pi+x)$ est:

a) $-x$ b) $\sin x$ c) $-\cos x$

2)L' approximation affine de $\frac{1}{1+x}$ lorsque $x\approx 0$ est :

a)1 , b)1-x c)1+x

3)L'approximation affine de $\sqrt{1+x}$ lorsque $x\approx 0$ est :

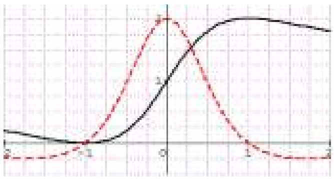
a)$1-\frac{1}{2}x$, b)$1+\frac{1}{2}x$ c)$1+2x$

4)pour tout $n\geq 1$,l'approximation affine de $(1+x)^n$ lorsque $x\approx 0$ est :

a)$1+nx$, b)$1+x^n$ c)$n+x$

II) Vrai ou Faux.

Les courbes ci-contre représentent une fonction f dérivable sur [-2 , 2] en trait continu et sa fonction dérivée f' en pointillé



a) $(\sqrt{f})'(0) = \frac{1}{2}$

b) La droite D : y = x + 1 est tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.

c) Il existe un réel $c \in]-1, 1[$ tel que $f'(c) = 1$

Exercice 2 : Répondre par Vrai ou Faux

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2.\sqrt{1-\cos(\frac{1}{x})}$.

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ admet au voisinage de $+\infty$ une branche infinie de direction $(o, \vec{i})$.

II) Soit f une fonction dérivable et strictement croissante sur $[-1 , 2]$ vérifiant $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ alors:

1) Il existe un réel $\alpha \in]-1,2[$ vérifiant : $3f'(\alpha) - f(2) + f(-1) = 0$.

2) On suppose que $f(-1) = 0$, $f(2) = 1$ et $f(\alpha) = \beta$.

a) La fonction f^{-1} est dérivable en β et $(f^{-1})'(\beta) = 3$.

b) L'équation $f(x) = x$ admet une unique solution dans $[-1 , 2]$.

c) La suite u définie sur IN par : $u_0 \in]-1,2[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est convergente .

III) (u_n) étant une suite définie sur IN.

(u_n) est convergente si et seulement si $(u_n)^2$ est convergente.

Exercice 2

1) Déterminer la limite sachant que f est dérivable sur IR tel que f(1) = f(0)

Calculer $\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{f(2x)-f(2x-1)}{x-\frac{1}{2}}$

2)

Soit f la fonction définie sur IR par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2\cos(\frac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de f en 0.

Exercice 3

Vérifier que pour $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $1 \leq \frac{\tan x}{x} \leq 1 + \tan^2 x$

Exercice 4(6points)

1) a) En appliquant les inégalités des accroissements finis Montrer que pour, tout $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ on a:

$\sin x < x < \tan x$.

b) Etablir alors que : pour tout $x \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$,

on a : $\frac{1}{\sin^2 x} - 1 < \frac{1}{x^2} < \frac{1}{\sin^2 x}$.

2) Soit f la fonction définie sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3}{2} - \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a)Montrer que f est continue sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right[$.

a)Montrer que pour tout x de , $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$0 < f(x) - \frac{1}{2} < (\sin x)^2$.

c) En déduire que f est dérivable à droite en 0 et préciser son nombre dérivé.

3) On pose : $\varphi(x) = x\cos x - \sin x$ avec $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

a)En utilisant 1)a) déduire le signe de $\varphi(x)$.

b) Montrer que f est dérivable sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ et que :

$f'(x) = \frac{-2\sin x}{x^3}\,\varphi(x)$.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J.

b) Construire la courbe représentative C de f puis la courbe représentative C ' de f^{-1}.

c) Montrer que l'équation : f(x) = x admet dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right[$ une solution α telle que : $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

5) Soit (U_n) la suite définie sur IN par :

$U_0 = \frac{\pi}{6}$ et pour tout $n \in$ IN, $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que pour tout $n \in$ IN, on a :

$\frac{\pi}{6} \leq U_n \leq \alpha$.

b) Etudier la monotonie de la suite (U_n).

En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 4

Soit h la fonction définie par :

h(1) = 0 et $h'(x) = \frac{1}{x}$, x>0

On pose $f(x) = h(x + \sqrt{1+x^2})$.

1°) Montrer que f est définie, dérivable sur IR et calculer f' (x) .

2°) Montrer que f est une fonction impaire.

3°) Montrer que pour tout x de IR+, f (x) ≤ x.

Exercice :5

Soit f une fonction dérivable sur IR vérifiant ;

$f(0) = 0$ et $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

A/ 1 / Montrer que f est une fonction impaire.

2 / a – Prouver que f (1) ≤ 1.

b – En étudiant les variations de la fonction K définie sur [1, +∞[par $K(x) = f(x) + \frac{1}{x}$

Montrer que f est majorée sur [1, +∞ [puis déduire que f admet une limite ℓ en +∞.

B / Soit g la fonction définie par , $g(x) = f(x)+f(\frac{1}{x})$

1 / a – Etudier les variations de g .

b – Déduire que $\ell = 2f(1)$

2 / On pose h (x) = tan x, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

a – Montrer que $\ell = \lim_{x\to\pi/2} (f\circ h)(x)$

b – Mque pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ on a f o h (x)= x

c – Déduire la valeur de ℓ puis la valeur de f (1).

3 / Construire la courbe C de f dans un repère orthonormé.

C / 1 / Montrer que l'équation f (x) = 2x-1 admet une solution unique $\alpha \in]0, 2[$

2 / Soit u la suite définie sur IN par :

$u_0 = 0$ et $\forall n \in$ IN, $-1 + u_{n+1} = f(\frac{1}{2}u_n)$

a – Montrer que $\forall$ n de IN $u_n \in [0, 2]$

b – Montrer que $|u_{n+1} - 2\alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - 2\alpha|$

c – Déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite .

Exercice 8

Soit f une fonction deux fois dérivable sur IR et telle que pour tout réel x : $f(2x) = 2f(x)$ **(1)**

1) a) Déterminer la valeur de $f(0)$

b) Démontrer que $f'(2x) = f'(x)$, x∈IR

2) Pour x réel fixé, on désigne par (u_n) la suite définie sur IN par : $u_n = f'(\frac{x}{2^n})$

a) Montrer que la suite (u_n) est constante.

b) En déduire que pour tout réel x, $f'(x) = f'(0)$

3) Déterminer toutes les fonctions deux fois dérivables sur IR qui vérifient la relation **(1)**

Exercice :9 (3 points)

Soit f une fonction définie sur [1, +∞[et ayant une dérivée continue et croissante. Pour tout $p \in IN^*$, on pose $u_p = \sum_{n=1}^{p} f'(n)$

1) a) Démontrer en appliquant le théorème des accroissements finis à f dans un intervalle bien choisi que : Pour tout n de IN*,

$f'(n) \leq f(n+1) - f(n) \leq f'(n+1)$

b) En déduire que ; Pour tout p de IN*,

$u_p - f'(p) \leq f(p) - f(1) \leq u_p - f'(1)$

2)On prend $f(x) = \frac{1}{x^2}$

a) Vérifier que la suite u est monotone.

b) Montrer que la suite u est minorée par (-3)

c) En déduire que la suite (v_p) de terme général $v_p = \sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ est convergente et que sa limite appartient à $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$

Exercice 10:

Soit $f(x) = -1 + \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $x \in]-1, 1[$

A) 1) a) Etudier les variations de f
b) Montrer que l'équation f(x)=x admet dans]-1, 1[une unique solution α et que $\alpha > \dfrac{4}{5}$

c) Déduire le signe de f(x)-x

2) Déduire que f réalise une bijection de]-1, 1[sur un intervalle J que l'on précisera.
3) Construire dans un repère orthonormé, les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ respectivement de f et de f^{-1}.
4) Expliciter $f^{-1}(x)$, $x \in J$
5) Soit u la suite définie sur IN par : $u_0 \in [0,\alpha]$ et $u_{n+1} = f^{-1}(u_n)$
a) Montrer que $u_n \in [0,\alpha]$, $n \in$ IN
b) Etudier la monotonie de la suite u.
c) Déduire que la suite u est convergente et calculer sa limite.

B) Soit h la fonction définie sur] -1, 1[par :

$h(x) = f\left(-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)$

1)a) Vérifier que $h(x) = -1 - \tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)$; $x \in]-1, 1[$

b) Montrer que h admet une fonction réciproque g définie sur IR.
c) Mque g est dérivable sur IR et que

$g'(x) = \dfrac{-2}{\pi[(x+1)^2+1]}$

2) Soit φ la fonction définie sur IR* par :

$\varphi(x) = g(x-1) + g\left(\dfrac{1}{x} - 1\right)$

a) Mque φ est dérivable sur IR* et déterminer $\varphi'(x)$
b) Calculer $\varphi(1)$ et $\varphi(-1)$.
En déduire que pour tout x >0, $\varphi(x) = -1$,
et que pour tout x < 0, $\varphi(x) = 1$

Exercice 11:

A/ Soit $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x - x^2}}{x-1}$; $x \in]1, 2]$
1) a/ Justifier la dérivabilité de f sur] 1, 2 [et exprimer f '(x) en fonction de x.
b/ Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2 et interpréter, graphiquement, le résultat obtenu.
c/ Dresser le tableau de variation de f, puis construire la courbe C_f représentative de f dans le repère R.
2) a/ Mque l'équation f(x) = x admet dans] 1, 2] une solution unique α.
b/ Vérifier que $\alpha \in \left]\dfrac{3}{2}, 2\right[$.

3) a/ Mque f réalise une bijection de] 1, 2] sur un intervalle J que l'on déterminera. On notera $f^{-1} = g$.
b/ Etudier la dérivabilité de g.
c/ Construire la courbe C_g dans le même repère R.
d/ Mque pour tout x de J on a : $g(x) = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

B/ On considère la suite U définie par
$U_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = g(U_n)$.
1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \in [1, 2]$.
2) Calculer g'(x) pour $x \in [1, 2]$, puis montrer que pour $x \in [1, 2]$, $|g'(x)| \le \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Moque pour tout n de IN, $|U_n - \alpha| \le \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n |1 - \alpha|$.

4) En déduire U converge vers un réel que l'on déterminera.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur [2, +∞[par

$f(x) = \sqrt{1 - \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}$

1) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 2.
b) Etudier les variations de f puis tracer sa courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé R.

2) a) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur un intervalle J à préciser.
b) Construire la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère que $\mathscr{C}$

3) a) Déterminer $g'\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
b) Montrer que $\frac{1}{g}$ est dérivable sur J puis vérifier que $\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-2}{\pi\sqrt{2-x^2}}$, $x \in$ J

4) Soit u la suite définie sur IN* \{1} par :

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} g\left(\frac{1}{n+k}\right)$$

a) Montrer que pour tout n de IN*\{1},
$\frac{n+1}{n} g\left(\frac{1}{2n}\right) \le u_n \le \frac{n+1}{n} g\left(\frac{1}{n}\right)$
b) Déduire que la suite u est convergente.

5) Soit h la fonction définie sur [-1, 1] par $h(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2-x^2}}$ et H la primitive de h sur [-1, 1] qui s'annule en 0.
a) Prouver que H est une fonction impaire.

b) Montrer que pour tout x de [0, 1[on a :
$1 - 4H(x) = \frac{2}{g(x)}$

c) Etudier les variations de H puis construire sa courbe dans un repère orthonormé R'.

Exercice n°: 15 (5 points)

Soit f la fonction définie sur $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

par : $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{2x+1}}$.

On désigne par C la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unité 2 cm)

1°)a) Montrer que f est dérivable sur I et que pour tout $x > -\frac{1}{2}$, $f'(x) = \frac{2x+2}{\left(\sqrt{2x+1}\right)^3}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Etudier le signe de f(x) – x pour $x > -\frac{1}{2}$.

2°)a) Montrer que f réalise une bijection de I sur IR. On note g la bijection réciproque de f.

b) Tracer, dans le même repère, les courbes représentatives C et C ' respectivement de f et de g.

c) Montrer que $\forall$ x $\in$ IR, $g(x) = \frac{x}{4}\left(\sqrt{x^2+4} + x\right)$.

Exercice 16: (5 points)

Soit f la fonction définie sur]1, +∞[par
$f(x) = \tan(\frac{\pi}{2x^2})$.

1) a) Montrer que f est dérivable sur]1, +∞[et que
$f'(x) = \frac{-\pi}{x^3}(1 + tan^2(\frac{\pi}{2x^2}))$

b) Déduire que f réalise une bijection de]1, +∞ [sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Construire dans un même repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de f et f^{-1}.

2) a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur J et calculer $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{3}}{3})$.

b) Soit g la fonction définie sur]0, +∞ [par
$g(x) = \left[\frac{1}{f^{-1}(x)}\right]^2$

M que g est dérivable sur]0, +∞ [puis expliciter g'(x)

3) Soit n ∈ IN^* ;

a) Montrer que l'équation f(x) = $\sqrt{n}$ admet dans]1, +∞ [une solution unique α_n

b) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ est décroissante.

c) Déduire que la suite $(\alpha_n)_{n\in IN^*}$ est convergente et déterminer sa limite.

4) Soit n ∈ IN^* , $S_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \alpha_{n+k}$

a) Montrer que $\alpha_{2n} \le S_n \le \alpha_n$

b) Déduire que la suite S est convergente vers une limite que l'on précisera.

Exercice 17 (5 points)

On considère la fonction f définie sur [0, 1] par :
$f(x) = \cos(\pi\sqrt{x})$

1) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite.

2) a) Dresser le tableau de variation de f puis tracer la courbe $\mathscr{C}$ de f dans le repère orthonormé $R = (O, \vec{i}, \vec{j})$ donné dans **l'annexe I**.

b) Montrer que f admet une fonction réciproque g définie sur [-1,1]

c)Tracer la courbe $\mathscr{C}'$ de g dans le même repère R.

d) Soit φ la fonction définie sur [0, 1] par :
$\varphi(x) = \cos(\pi(1 + \sqrt{x}))$
Montrer que la courbe de φ est l'image de celle de g par une rotation que l'on précisera

3) a) Montrer que g est dérivable en 1 à gauche et déterminer g'(1).

b) Etudier la dérivabilité de g en (-1) à droite.

c) Montrer que g est dérivable sur]-1, 1[et que
$g'(x) = \frac{-2\sqrt{g(x)}}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

4) Soit h la fonction définie sur [-1, 1] par
$h(x) = \sqrt{g(x)}$

a) Montrer que h est dérivable sur]-1, 1[et que
$h'(x) = \frac{-1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$

b)Montrer que pour tout x ∈ [-1, 1], h(x) + h(-x) = 1

Exercice 18 : (6 points)

I/ Soit f la fonction définie sur [0, π [par
$f(x) = \sqrt[3]{tan^2(\frac{x}{2})}$.

1) a) Etudier la dérivabilité de f en 0 à droite.

b) Etudier les variations de f sur [0, π [.

c) Déduire que f réalise une bijection de [0, π [sur un intervalle J que l'on précisera.

2) Tracer les courbes représentatives de f et de f^{-1} dans un repère un même repère orthonormé. On calculera $f(\frac{\pi}{2})$ et $f(\frac{2\pi}{3})$.

3) a) Etudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.

b) Montrer que pour tout x ≥ 0 ; $(f^{-1})'(x) = \frac{3\sqrt{x}}{1+x^3}$.

II/ On pose g(x) = $f^{-1}(x^2) + f^{-1}\left(\frac{1}{x^2}\right)$; x >0.

1) a) Montrer que g est dérivable sur]0, +∞[puis calculer g'(x).

b) Déduire que pour tout x > 0 , g(x) = π.

2) Mque pour tout x > 0 et pour tout k ∈ $\{0, 1, 2, \dots, n\}$

$$f^{-1}(n) \le f^{-1}(n+k) \le f^{-1}(2n).$$

3) Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\frac{1}{n+k}\right)$.

a) Montrer que pour tout n > 0, $f^{-1}\left(\frac{1}{2n}\right) \le u_n \le f^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)$.

b) Déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 19(7 points)

La courbe $\mathcal{C}$ donnée dans **l'annexe I** représente une fonction f définie et continue sur]0, +∞ [et dérivable sur]0, +∞ [\ {1, 2}.

- $\mathcal{C}$ admet au point A(2, 0) une demi- tangente verticale.
- Le point B(3, 2) est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{C}$ admet une branche parabolique de direction (O, $\vec{j}$) au voisinage de +∞
- $\mathcal{C}$ admet une asymptote verticale d'équation : x = 0.

1) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(\cos x)}{x}\ ;\lim_{x\to2^-}\frac{f(x)}{x-2}\qquad \lim_{x\to1^+}\frac{f(3x)-f(x)}{x-1}$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x^2+1)}{x}$$

2) Soit h la restriction de f sur [2, +∞[.

a) Montrer que h réalise une bijection de [2, +∞[sur intervalle J que l'on précisera. (On notera h^{-1} la bijection réciproque de h)

b) Montrer que h^{-1} est dérivable sur J. Calculer $(h^{-1})'(2)$.

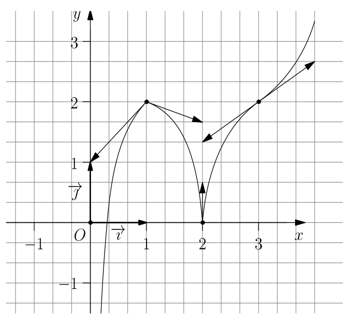
c) Construire la courbe $\mathcal{C}'$ de h^{-1} dans **l'annexe I** .

3) Soit g la fonction définie par : g(x) = $\sqrt{2-f(x)}$

a) Déterminer le domaine de définition D de g.

b)Etudier la dérivabilité de g sur D.

Dresser le tableau de variation de g.



Exercice 20

Soit la fonction f définie sur l'intervalle]0;+∞[par :
$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x} & \text{si } x \in \left]0;1\right] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-1} & \text{si } x \in \left]1;+\infty\right[\end{cases}$$

On note par (C_f) sa représentation graphique dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) et par Δ la droite d'équation : y=x.

I) 1) a) Montrer que f est continue en 1.

b) Etudier la dérivabilité de f en 1et interpréter graphiquement.

2) a) Calculer f'(x) pour x appartenant à $\left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

b) Montrer que : $\forall x \in \left]0;1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$, f'(x) < 0.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que f réalise une bijection de $\left]0;+\infty\right[$ sur $\left]0;+\infty\right[$

b) Montrer que : $\begin{cases} x\in\left]0;1\right[\Rightarrow f(x)\in\left]1;+\infty\right[\\ x\in\left]1;+\infty\right[\Rightarrow f(x)\in\left]0;1\right[\end{cases}$

c) Montrer que : $\forall x \in \left]0;+\infty\right[; (f o f)(x) = x$

En déduire que Δ est un axe de symétrie de (C_f)

d) Tracer (C_f) ainsi que ses demi tangentes au point d'abscisse 1.

II) Soit la fonction g définie sur l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$

par : g(x) = f(tanx)

1) Montrer que g est dérivable sur l'intervalle $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ et calculer g'(x)

2) Vérifier que : $\forall x \in \left]0,\frac{\pi}{4}\right]$; g(x)=$\frac{1}{\sin(2x)}$

3) a) Etudier les variations de g

b) Montrer que g réalise une bijection de $\left]0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur [1,+∞[

4) Soit h la réciproque de g

a) Montrer que h est dérivable sur $\left]1,+\infty\right[$ et que : $\forall x \in \left]1,+\infty\right[$, h'(x)=$\frac{-1}{2x\sqrt{x^2-1}}$

b) Etudier la dérivabilité de h à droite en 1.