Exercice n°1:

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1-\cos(\pi x)}{x} & \text{si } x<0\\ \dfrac{1-x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x\geq 0\end{cases}$

1- Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty,0\right[$: $1+\dfrac{2}{x}\leq f(x)\leq 1$ et calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2- Montrer que f est continue sur $\left]-\infty,0\right]$

3- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\dfrac{1}{2},0\right[$.

4-a- Montrer que f est dérivable sur $\left[0,+\infty\right[$ et que $f'(x)=-\dfrac{1+x}{\sqrt{1+x^2}^{\,3}}$.

b- Montrer que pour tout $x\in[0,1]$: $|f'(x)|\leq 2$.

5- On pose pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$: $g(x)=f(\tan x)+f(\cot\mathrm{an}\,x)$.

a- Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et montrer que $g'(x)=0$.

b- En déduire que pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$: $g(x)=0$.

Exercice n°2:

A Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=1+\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$.

1-a- Montrer que pour tout $x\in IR$: $f'(x)=\dfrac{2}{\sqrt{x^2+1}^{\,3}}$.

b- Montrer que pour tout $x\in\left[1,+\infty\right[$: $0<f'(x)\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2- Dresser le tableau de variations de f.

3- Soit (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a- Montrer que le point A(0,1) est un centre de symétrie de (C).

b- Donner une équation de la tangente T à (C) au point A.

c- Etudier la position relative de (C) et T et interpréter graphiquement le résultat.

4- tracer T et (C) sur le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

B Soit g la fonction définie sur IR^* par : $g(x) = \begin{cases} \dots \\ \dfrac{1+\sqrt{2}}{x^3-1}\sin\left(x-\dfrac{1}{x^2}\right) & \text{si } x\in\,]-\infty,1[\,\setminus\{0\} \end{cases}$

1- Montrer que g est continue en 1.

2- Déterminer la limite de g en $(-\infty)$.

3- Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet une unique solution α dans $]2,3[$.

C Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x)=\begin{cases} g(1+\tan x) & \text{si } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\\ h(\frac{\pi}{2})=3 \end{cases}$

1- Montrer que h est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

2- Montrer que h est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$

Exercice n°3:

I- Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2(x-2)}-\sqrt{x-1}$.

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1- Déterminer la limite de f à droite en 2 et interpréter le résultat graphiquement.

2- Etudier la branche infinie de (C).

3-a- Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et que pour tout $x\in\,]2,+\infty[$: $f'(x)=-\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{(x-1)^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}\right]$.

b- Dresser le tableau de variations de f.

4-a- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α dans $\left]\frac{5}{2},3\right[$. $]2{,}3\ ;\ 2{,}5[$

b- Montrer que : $f(x)=0 \Leftrightarrow 2+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}=x$.

5- Tracer la courbe (C).

II- Soit g la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $g(x)=2+\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}$.

1- Etudier le sens de variations de g.

2- Montrer que : $g([2,3])\subset[2,3]$.

III- Soit h la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $h(x)=f(2+\cos x)$.

1- Déterminer la limite de h à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

2- Montrer que h est dérivable sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $h'(x)$.

3- Dresser le tableau de variations de h.