Exercice n°1 :

Soit f la fonction définie sur $]2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

1-a- Montrer que f est dérivable sur $]2,+\infty[$ et que $f'(x)=\dfrac{-8}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}$ pour tout $x\in\,]2,+\infty[$

b- Dresser le tableau de variation de f.

c- Tracer C_f dans un repère orthonormé.

2- Soit g la fonction définie sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{2}f\left(\dfrac{2}{\cos x}\right)+\dfrac{1}{4} & \text{si } x\neq\dfrac{\pi}{2} \\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{4} \end{cases}$

a- Montrer que g est continue à gauche de $\dfrac{\pi}{2}$.

b- Montrer que g est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que $g'(x)=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$ pour tout $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice n°2 :

Soit f la fonction définie sur IR par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)}{x^2+1}+2 & \text{si } x\in\,]-\infty,0[\\ f(x)=1+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{si } x\in[0,+\infty[\end{cases}$

1-a- Montrer que pour tout $x\in\,]-\infty,0[$: $|f(x)-2|\leq x^2$.

b- En déduire que f est continue en zéro.

2- Calculer la limite de f en $(+\infty)$ et en $(-\infty)$ et interpréter graphiquement le résultat .

3- Montrer que f est dérivable en zéro et calculer $f'(0)$.

4-a- Montrer que pour tout $x\in[0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{-x}{\sqrt{1+x^2}^3}$.

b- Montrer que l'équation : $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]1,2[$.

5- Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} g(x)=\dfrac{1}{f(\tan x)} & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\\ g(\frac{\pi}{2})=1 \end{cases}$

a- Montrer que g est continue à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

b- Montrer que g est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et que : $g'(x)=\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$.

Exercice n°3:

Soit f une fonction dérivable sur IR tel que $f(0) = -\frac{\pi}{4}$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}$ et pour tout $x \in$ IR : $f'(x) = \frac{2x}{x^4-2x^2+2}$

1- Montrer que f est paire et calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2- Soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $g(x) = f\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right)$ si $x > 0$ et $g(0) = \frac{\pi}{2}$.

a- Montrer que g est continue à droite en 0.

b- Montrer que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout $x \in]0, +\infty[$ $g'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.

3- On admet que pour tout $x \in]0, +\infty[$ il existe $c \in]0, x[$ tel que $g(x) - \frac{\pi}{2} = \frac{-x}{1+c^2}$.

a- En déduire un encadrement de $\frac{g(x)-\frac{\pi}{2}}{x}$ pour $x \in]0, +\infty[$.

b- Montrer alors que g est dérivable à droite en 0.

Exercice n°4:

Soit f la fonction définie sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = 2x + 1 - \sqrt{4x^2 - 1}$.

On désigne par Cf la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1-a- Etudier la dérivabilité de f à droite en $\frac{1}{2}$ et interpréter le résultat graphiquement.

b-- Montrer que f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et que $f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{4x^2-1}\left(2x + \sqrt{4x^2-1}\right)}$.

c- Dresser le tableau de variations de f.

2- Soit g la fonction définie sur $\left]0, \frac{1}{2}\right]$ par $g(x) = \frac{1}{2\sin(\pi x)}$.

a- Dresser le tableau de variations de g.

b- Montrer que l'équation $g(x) = 2x$ admet une unique solution dans l'intervalle $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[$.

3- Soit h la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ par $\begin{cases} h(x) = f \circ g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) = 1 \end{cases}$.

a- Montrer que h est continue sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

b- Montrer que h est dérivable sur $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et que $h'(x) = \frac{\pi}{1+\cos(\pi x)}$