Exercice n°1

(2020/2021)

A] Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}$

1°) Déterminer le domaine de définition de g

2°) a) Mq $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$.

b) Mq g est impaire

3°) Etudier la dérivabilité de g en 0 et à droite en 1

4°) Dresser le tableau de variation de g.

B] Soit $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\in\mathbb{R}\setminus]0,1] \\ f(x)=g(x) & \text{si } x\in[0,1]. \end{cases}$

1°) Etudier la continuité de f en 0.

2°) Etudier la dérivabilité de f en 0.

3°) Dresser le tableau de variation de f.

4°) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

c) Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n=\sum\limits_{k=1}^{n} k\sin\left(\frac{1}{k}\right)$

1°) a) Mq l'équation : $\cos x-\frac{2}{\pi}=0$ admet une seule solution $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

b) Donner le tableau de variation de la fonction φ définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ par $\varphi(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$.

En déduire que $\frac{2}{\pi}x\leq\sin x$ $\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Exercice n°2

On définit la fonction f sur l'intervalle $[0,\pi^2]$ par $f(x)=\cos(\sqrt{x})$.

1°) a) Vérifier que pour tout réel $x\in[0,\pi^2]$, $f(x)-1=-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

b) Démontrer que f est dérivable en zéro et donner $f'(0)$.

2°) a) Justifier que f est dérivable sur $]0,\pi^2]$ et calculer $f'(x)$

b) Dresser le tableau de variation

3°) a) Resoudre dans $[0,\pi^2]$ l'équation : $f(x)=0$.

b) Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse $\frac{\pi^2}{4}$

Exercice n°3 :

on considère une fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $h(1)=0$ et $h'(x)=\frac{1}{x}$. on pose $F(x)=h(x+\sqrt{1+x^2})$.

1°) Montrer que F est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$ et Calculer $F'(x)$

2°) Mq F est une fonction impaire.

3°) Mq pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) \leq x$.

Exercice n°4 .

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f(2)=2$ et $\mathscr{C}$ sa Courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ dans le graphique ci-dessous $\mathscr{C}'$ est la Courbe de la fonction dérivée f' de f dans $(O,\vec{i},\vec{j})$. L'axe des abscisses est une asymptote à $\mathscr{C}'$

1°) a) Etudier la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.

b) Etudier la monotonie de f' sur $\mathbb{R}$.

2°) Mq $\mathscr{C}$ admet exactement deux points d'inflexions dont on précisera leurs abscisses

3°) Mq $\mathscr{C}$ admet exactement deux tangentes horizontales

4°) Mq T : la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 passe par le point $A(0,1)$

5°) Mq l'équation $f'(x)=-\frac{1}{8}$ admet au moins une solution dans $[-2,2]$

6°) Mq $f(3) \leq \frac{5}{2}$.