Lycée pilote de Tunis	Dérivation 3 applications des accroissements finies	Terminales Maths
Mr Ben Regaya. A	+ éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

a et b deux réels strictement positifs avec $a \prec b$.

1. Montrer que pour tout naturel $n \geq 1$: $(n+1)a^n(b-a) \leq b^{n+1} - a^{n+1} \leq (n+1)b^n(b-a)$
2. Etudier alors la monotonie de la suite (u_n) définie pour n naturel non nul par : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.
3. a) Montrer que pour tout réel positif x et pour tout naturel non nul $(1+x)^n \geq 1+nx$.

   b) Déduire que la suite u est minorée.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^{n+1}$ et la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(3^{n-k}\right)\left(2^k\right)$$

1. a) Montrer que : $\forall x \in [2,3]$, $(n+1)2^n \leq f'(x) \leq (n+1)3^n$.

   b) En déduire que : $2^n \leq \frac{1}{n+1}\left(3^{n+1} - 2^{n+1}\right) \leq 3^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. a) En utilisant 1. b), donner un encadrement de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 3

Soit p un entier naturel non nul fixé et soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^{p+1}$

1. Montrer en utilisant les accroissements finis que : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

   $(p+1)x^p \leq (x+1)^{p+1} - x^{p+1} \leq (p+1)(x+1)^p$
2. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a : $k^{p+1} - (k-1)^{p+1} \leq (p+1)k^p \leq (k+1)^{p+1} - k^{p+1}$

   Montrer alors que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^{p+1} \leq (p+1)\sum_{k=1}^{n} k^p \leq (n+1)^{p+1} - 1$

   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}}\right)$.

Exercice4*

a et b deux réels tels que $a \prec b$. Soit une fonction f continue $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$, et vérifiant $f(a)=f(b)=0$.

Soit d un réel de $\mathbb{R}\backslash[a,b]$. Montrer qu'il existe une tangente à la courbe représentative de f passant par le point $A\ (d,0)$.

Exercice5*

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable de dérivée continue et vérifiant $f(0)=0$ et $f(1)=1$. Démontrer que, pour tout $n\geq 1$, il existe $0\prec x_1\prec x_2\prec\ldots\prec x_n\prec 1$ vérifiant $f'(x_1)+f'(x_2)+\ldots+f'(x_n)=n$.

Exercice 6

Soit la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$.

1. Démontrer que pour tout entier $p > 0$; $\dfrac{2}{(p+1)^3}\prec f(p)-f(p+1)\prec\dfrac{2}{p^3}$.
2. A l'aide de ce résultat montrer que : $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n^2}\prec\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+.....+\dfrac{1}{n^3}\prec\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2n^2}\quad\forall\, n\geq 2$.
3. Démontrer que la suite u définie par : $u_n=\dfrac{1}{1^3}+\dfrac{1}{2^3}+.....+\dfrac{1}{n^3}$ est convergente.

Lycée pilote de Tunis	**Dérivation 3** applications des accroissements finies	*Terminales Maths & s-ex*
Mr Ben Regaya. A	+ éléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. Soit *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^{n+1}$. *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=(n+1)x^n$.

   Pour a et b réels strictement positifs avec $a \prec b$.

   $a\le x\le b \Leftrightarrow a^n\le x^n\le b^n \Leftrightarrow (n+1)a^n\le (n+1)x^n\le (n+1)b^n \Leftrightarrow (n+1)a^n\le f'(x)\le (n+1)b^n$.

   D'après le théorème des inégalités des accroissements finis

   $(n+1)a^n(b-a)\le f(b)-f(a)\le (n+1)b^n(b-a) \Leftrightarrow (n+1)a^n(b-a)\le b^{n+1}-a^{n+1}\le (n+1)b^n(b-a)$

   c'est le résultat demandé.

2. On a : $u_{n+1}-u_n=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ et d'après la première question avec $b=\frac{1}{n}$ et $a=\frac{1}{n+1}$, on peut

   écrire : $(n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\le(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

   $\Leftrightarrow (n+1)\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\le(n+1)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(\frac{1}{n(n+1)}\right)$

   $\Leftrightarrow \frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\le\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

   $\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}-\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le 0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n}\right]-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\le 0$

   $\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n-\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\le 0$ et donc la suite (u_n) est croissante.

3. a) Par la formule de binôme : $(1+x)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k=1+nx+\sum_{k=2}^{n}C_n^k x^k\ge 1+nx$ car $\sum_{k=2}^{n}C_n^k x^k\ge 0$.

   Ainsi pour tout réel positif x et pour tout naturel non nul $(1+x)^n\ge 1+nx$.

   b) Pour $x=\frac{1}{n}$, n naturel non nul, on obtient $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge 1+n\times\frac{1}{n}\Leftrightarrow u_n\ge 2$ et donc la suite (u_n) est minorée

   par 2.

Exercice2

1. a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ polynôme et $f'(x)=(n+1)x^n$. D'où $x\in[2,3]\Rightarrow 2^n(n+1)\le f'(x)\le 3^n(n+1)$.

   b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in[2,3];\quad 2^n(n+1)\le f'(x)\le 3^n(n+1)$. D'après le théorème des inégalités des accroissements finis $2^n(n+1)\le f(3)-f(2)\le 3^n(n+1)$.

   D'où $2^n\le \frac{1}{n+1}\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)\le 3^n$.

2. a) $u_n=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}3^n\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{3^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{3^n}{n+1}\times\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}=\frac{3^{n+1}}{n+1}\times\left(1-\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)=\frac{3^{n+1}}{n+1}\times\left(\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{3^{n+1}}\right)$

   Finalement $u_n=\frac{1}{n+1}\left(3^{n+1}-2^{n+1}\right)$.

   D'après 1.b) $2^n\le u_n\le 3^n$.

   b) $\lim\limits_{n\to+\infty}2^n=+\infty\Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Exercice 3

1. Soit pour t réel : $f(t)=t^{p+1}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout t réel, $f'(t)=(p+1)t^p$.
   f est alors strictement croissante sur $[0,+\infty[$.
   Soit x un réel positif et t un réel compris entre x et $x+1$.
   On a pour x réel positif: $x\le t\le x+1\Leftrightarrow x^p\le t^p\le(x+1)^p\Leftrightarrow(p+1)x^p\le(p+1)t^p\le(p+1)(x+1)^p$ et donc $(p+1)x^p\le f'(t)\le(p+1)(x+1)^p$.
   On a donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $[x,x+1]$ pour tout réel $x\ge0$ et pour tout réel t un réel compris entre x et $x+1$, $(p+1)x^p\le f'(t)\le(p+1)(x+1)^p$ alors par le théorème des inégalités des accroissements finies : $(x+1-x)(p+1)x^p\le f(x+1)-f(x)\le(x+1-x)(p+1)(x+1)^p$ soit encore : Pour tout x∊ $\mathbb{R}_+$, on a :
   $(p+1)x^p\le(x+1)^{p+1}-x^{p+1}\le(p+1)(x+1)^p$.
2. On a d'une part : $(x+1)^{p+1}-x^{p+1}\le(p+1)(x+1)^p$ et donc si on remplace x par $k-1\ge0$ car k ∊$\mathbb{N}$*, on obtient : $k^{p+1}-(k-1)^{p+1}\le(p+1)k^p$.
   D'autre part $(p+1)x^p\le(x+1)^{p+1}-x^{p+1}$ devient $(p+1)k^p\le(k+1)^{p+1}-k^{p+1}$ on a remplacé x par $k\ge0$.
   On vient de prouver que pour tout k ∊$\mathbb{N}$*, on a : $k^{p+1}-(k-1)^{p+1}\le(p+1)k^p\le(k+1)^{p+1}-k^{p+1}$.

   On a : pour tout k ∊$\mathbb{N}$*, on a : $k^{p+1}-(k-1)^{p+1}\le(p+1)k^p\le(k+1)^{p+1}-k^{p+1}$

Donc par somme sur k , $1 \le k \le n$ $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} k^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} (k-1)^{p+1} \le \sum_{k=1}^{n} (p+1)k^p \le \sum_{k=1}^{n} (k+1)^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} k^{p+1}$$

Ce qui s'écrit aussi : $\left(1+2^{p+1}+3^{p+1}+...+n^{p+1}\right)-\left(1+2^{p+1}+3^{p+1}+...+(n-1)^{p+1}\right) \le \sum_{k=1}^{n} (p+1)k^p$

$$\le \left(2^{p+1}+3^{p+1}+...+(n+1)^{p+1}\right)-\left(1+2^{p+1}+3^{p+1}+...+n^{p+1}\right)$$

ou encore : $n^{p+1} \le \sum_{k=1}^{n} (p+1)k^p \le (n+1)^{p+1}-1$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^{p+1} \le (p+1) \sum_{k=1}^{n} k^p \le (n+1)^{p+1}-1$.

On vient de prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $n^{p+1} \le (p+1)\left(1^p+2^p+...+n^p\right) \le (n+1)^{p+1}-1$

Soit encore pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \le \dfrac{(p+1)\left(1^p+2^p+...+n^p\right)}{n^{p+1}} \le \dfrac{(n+1)^{p+1}-1}{n^{p+1}}$ qui s'écrit aussi :

$$\frac{1}{p+1} \le \frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}} \le \frac{(n+1)^{p+1}-1}{(p+1)n^{p+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} \le \frac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}} \le \frac{1}{p+1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p+1} - \frac{1}{n^{p+1}}\right]$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{p+1} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n^{p+1}} = 0$ donc par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1^p+2^p+...+n^p}{n^{p+1}}\right) = \dfrac{1}{p+1}$

Exercice4*

L'équation de la tangente au point d'abscisse x_0 est : $y = f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Cette tangente passe par le point A si et seulement si $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0-d}$.

Posons $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-d}$ définie et continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$,de dérivée $g'(x) = \dfrac{f'(x)(x-d)-f(x)}{(x-d)^2}$.

De plus $g(a) = g(b) = 0$. Par le théorème de Rolle, on peut trouver $x_0 \in]a,b[$ tel que $g'(x_0) = 0$ .Pour ce x_0, la relation $f'(x_0) = \dfrac{f(x_0)}{x_0-d}$ est donc vérifier, et la tangente a la courbe de f au point $(x_0, f(x_0))$ passe par A.

Exercice 5*

Pour n = 1 le résultat est évident. C'est juste l'application des accroissements finis entre 0 et 1.

Pour $n \succ 1$ appliquons les accroissements finis à f entre $\dfrac{(k-1)}{n}$ et $\dfrac{k}{n}$ pour k = 1, 2,…n.

On obtient un $x_k \in \left]\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right[$ tel que : $\dfrac{f\left(\dfrac{k}{n}\right)-f\left(\dfrac{k-1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}} = f'(x_k)$ et donc par somme

$$f'(x_1)+f'(x_2)+...+f'(x_n) = \frac{f(1)-f(0)}{\dfrac{1}{n}} = n.$$

Exercice 6

1. f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $f'(x)=-\frac{2}{x^3}$. Pour $p\in\mathbb{N}^*$ et $x\in[p,p+1]$; $-\frac{2}{p^3}\le f'(x)\le-\frac{2}{(p+1)^3}$.

   D'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

   $$\forall p\succ 0\ -\frac{2}{p^3}(p+1-p)\le f(p+1)-f(p)\le-\frac{2}{(p+1)^3}(p+1-p)\Leftrightarrow$$

   $$\forall p\succ 0;\quad -\frac{2}{p^3}\le f(p+1)-f(p)\le-\frac{2}{(p+1)^3}\ \Leftrightarrow\forall p\succ 0;\quad \frac{2}{(p+1)^3}\le f(p)-f(p+1)\le\frac{2}{p^3}$$

2. D'une part $\forall\ p\succ 0;\quad f(p)-f(p+1)\le\frac{2}{p^3}\Rightarrow\Rightarrow\sum_{p=1}^{n-1}f(p)-f(p+1)\le\sum_{p=1}^{n-1}\frac{2}{p^3}$

3. $\Leftrightarrow f(1)-f(n)\le 2\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^3}\right)$

   $$\Leftrightarrow\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\le\left(1+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^3}+\frac{1}{n^3}-\frac{1}{n^3}\right)\le\left(1+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^3}+\frac{1}{n^3}\right)$$

   D'autre part

   $$\frac{2}{(p+1)^3}\le f(p)-f(p+1)\Rightarrow\forall n\ge 2;\quad \sum_{p=1}^{n-1}\frac{2}{(p+1)^3}\le\sum_{p=1}^{n-1}f(p)-f(p+1)$$

   $$\Leftrightarrow\forall n\ge 2;\ 2\left(\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^3}+\frac{1}{n^3}\right)\le f(1)-f(n)$$

   $$\Leftrightarrow\forall n\ge 2:\ \left(-1+\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^3}+\frac{1}{n^3}\right)\le\frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}$$

   $$\Leftrightarrow\forall n\ge 2\ ;\ \left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)^3}+\frac{1}{n^3}\right)\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}$$

   Conclusion : $\Leftrightarrow\forall n\ge 2;\ \frac{1}{2}-\frac{1}{2n^2}\le\sum_{k=}^{n}\frac{1}{k^3}\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}$.

4. $u_n=\sum_{k=}^{n}\frac{1}{k^3}$ et on $u_n\le\frac{3}{2}-\frac{1}{2n^2}\le\frac{3}{2}$. Donc la suite u est majorée par $\frac{3}{2}$.

   De plus $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)^3}\succ 0$ donc la suite u est croissante et par suite elle converge.