Lycée pilote Sfax Smaoui sofiène	**Série d'exercices n° 9**	$4^{ème}$ Math

Exercice 1

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant : $f(0)=0$, $f(1)=\frac{\pi}{4}$ et $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

1°) a) Vérifier que $f'(x)\leq 1$, pour tout $x\in\mathbb{R}$, puis déduire en utilisant l'accroissement finis que $|f(x)|\leq|x|$, *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

b) On pose $k(x)=f(x)+\frac{1}{x}$, $x\geq 1$. Montrer que k est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

En déduire que f est majorée par 2 sur $[1,+\infty[$ et que f admet une limite finie l en $+\infty$.

2°) Soit $g(x)=f(x)+f(\frac{1}{x})$; $x\in\mathbb{R}^*_+$..

Calculer $g'(x)$. En déduire que $g(x)=2f(1)$ et que $l=\frac{\pi}{2}$.

3°) a) Montrer que f est impaire.

b)Tracer la courbe ζ_f de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4°) Montrer que l'équation $f(x)=2x-1$ admet une seule solution $\alpha\in]0,2[$.

5°) On considère la suite u définie par $\begin{cases} u_0=0 \\ u_{n+1}=1+f(\frac{1}{2}u_n), & n\in\mathbb{N}\end{cases}$

Montrer que *pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[0,2]$ et que $|u_{n+1}-2\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-2\alpha|$.

En déduire que u est convergente et déterminer sa limite .

Exercice 2

On a représenté dans l'annexe la courbe C' représentative de la fonction dérivé f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, T est la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

1) a) Par lecture graphique déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f'(x)}{x}$ et $f''(0)$

b) Déterminer les abscisses des extrémums et des points d'inflexions de la courbe C de f

c) Sachant que $f(0)=1$, montrer en utilisant l'accroissement finis que $1\leq f(1)\leq 2$

2) On donne $f(-1)=0$, $f(1)\simeq 1,5$ *et* $f(2)\simeq 1,2$. Donner l'allure de C dans le même repère en admettant qu'elle se comporte comme C' au voisinage de $-\infty$ et $+\infty$

3) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution $\alpha\in[1,2]$

4) Soit la suite u définie par $\begin{cases} u_0\in[1,2]\setminus\{\alpha\} \\ u_{n+1}=f(u_n), n\in\mathbb{N}\end{cases}$

a) Montrer que *pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $u_n\in[1,2]$

b) Montrer que *pour tout* $n\in\mathbb{N}$ $|u$ ... ite de la suite u.