1/ Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{6}\right]$, montrer que $0 \le t_n \le U_n$. En déduire $\lim\limits_{+\infty} t_n$.

2/ Soit $x \in \left]\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right[$, montrer que t est divergente.

3/ Soit $x = \frac{\pi}{4}$. On pose $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t_k}{n^2+1}$, calculer s_n en fonction de n puis $\lim\limits_{+\infty} s_n$.

Exercice 4

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_1 = 2$ et $U_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{U_n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1/a/ calculer U_2 et U_3

b/ Montrer par récurrence que *pour tout entier* $n \ge 2$, $n < U_n < n+1$. Calculer alors $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

c/ Montrer que (U_n) est croissante.

2/ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $V_n = U_n - n$ et $W_n = \frac{1}{V_n} - 1$.

a/ Calculer W_1 et montrer que pour tout entier n non nul, $W_{n+1} = \dfrac{1}{W_n + \frac{1}{n}}$

b/ Montrer par récurrence que *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \frac{1}{n} \le W_n \le 1$.

c/ En déduire que les suites (W_n) et (V_n) sont convergentes et donner la limite de chacune.

3/ On pose $S_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}(kW_k)$, $n \in \mathbb{N}^*$

a/ Montrer que *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2} - \frac{1}{2n} \le S_n \le \frac{1}{2} + \frac{1}{2n}$.

b/ En déduire que (S_n) est convergente et donner sa limite.

Exercice 5

1) Soit f la fonction définie sur $]-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2+3}{2(x+1)}$.

a) Dresser le tableau de variations de f

b) Montrer que C_f admet une asymptote oblique que l'on déterminera. Tracer C_f

2) Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = f(u_n) \;,\; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $1 \le u_n \le \frac{3}{2}$

b) Montrer que la suite u est décroissante et qu'elle converge vers un réel que l'on déterminera.

3) Montrer que *pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \le \frac{1}{8}|u_n - 1|$. En déduire que $|u_n - 1| \le \frac{1}{2^{3n+1}}$

4) on pose $S_n = \frac{2}{n^4}(u_1 + 2^3 u_2 + 3^3 u_3 + \ldots + n^3 u_n)$, $n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

b) Montrer que *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 = \frac{2}{n^4}\sum\limits_{k=1}^{n} k^3(u_k - 1)$

c) En déduire que *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\left|S_n - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right| \le \frac{1}{7n}\left(1 - \left(\frac{1}{8}\right)^n\right)$. Quelle est la limite de S_n ?