c) Montrer que l'équation $f(x)=\frac{1}{3}$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]10, 11[$.

Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} prés.

6 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+\cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x\in]-\infty, 1[, \\ f(x)=\sqrt{x^2+x+2}-x & \text{si } x\in[1, +\infty[. \end{cases}$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. a) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution α dans $\left]-\frac{1}{2}, 0\right[$.

   b) En déduire que $\sin(\pi\alpha)=-\sqrt{1-\alpha^2}$.
4. Soit g la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} g(x)=f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ g\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

   Montrer que g est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

7 Soit f la fonction définie sur $\left[-\frac{9}{2}, +\infty\right[$ par $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+9}-3}{2x} & \text{si } x\neq 0, \\ f(0)=\dfrac{1}{6}. \end{cases}$

① a) Montrer que f est continue sur $\left[-\frac{9}{2}, +\infty\right[$.

b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Interpréter le résultat.

② a) Vérifier que pour tout $x\in\left[-\frac{9}{2}, +\infty\right[$, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2x+9}+3}$.

b) Montrer alors que f est strictement décroissante sur $\left[-\frac{9}{2}, +\infty\right[$ puis déterminer $f\left(\left[-\frac{9}{2}, +\infty\right[\right)$.

③ Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $[0, 1]$ une unique solution α.

④ Soit g la fonction définie sur $\left]0, \frac{1}{3}\right]$ par $g(x)=\dfrac{1-6x}{2x^2}$ et $h=g\circ f$.

a) déterminer l'ensemble de définition D_h de h et expliciter $h(x)$ pour tout $x\in D$.

b) En déduire $g\left(\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

⑤ Soit F la fonction définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $\begin{cases} F(x)=f\left(\dfrac{9}{2}\tan^2 x\right) & \text{si } x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right[, \\ F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0. \end{cases}$

a) Vérifierque pour tout $x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $F(x)=\dfrac{\cos x}{3(1+\cos x)}$.

b) Montrer que F est continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c) Dresser le tableau de variation de F sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.