Lycée pilote Sfax *Smaoui sofiène*	***Série d'exercices n°2***	*$4^{\text{ème}}$ Math*

Exercice 1 Le plan P est rapprté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1) Pour tous réels x et y, on pose $z = x + iy$ et $w = 3z^2 + z\bar{z} - 6i\sqrt{2}$.
   Mettre w sous sa forme algèbrique et en déduire les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $w = 0$.
2) On note A_1 le point d'affixe $1 + i\sqrt{2}$ et A_2 le point d'affixe $-1 - i\sqrt{2}$.

   Pour tout t de $]0, \pi[$, on considère le point M défini par $\begin{cases} A_2M = A_2A_1 \sin(t) \\ \left(\widehat{\overrightarrow{A_2A_1}, \overrightarrow{A_2M}}\right) \equiv t[2\pi] \end{cases}$

a) Montrer que l'affixe z du point M vérifie $z = (1 + i\sqrt{2})\left[\left(-1 + \sin(2t)\right) + i\left(1 - \cos(2t)\right)\right]$.

b) En déduire que lorsque t varie le point M appartient à un cercle Γ dont on précisera les coordonnées de son centre C et son rayon R.

c) Calculer $\overrightarrow{A_2A_1} . \overrightarrow{A_2C}$ et $\left\|\overrightarrow{A_2C}\right\|$.
   Quelle propriété géomètrique peut-on déduire pour le cercle Γ ?

Exercice 2 Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit A(i).

A tout point M(z), distinct de A, on associe le point M'(z') tel que $z' = \dfrac{z^2}{i - z}$.

1) Déterminer les points M confondus avec leur image M'.

2) On pose $z = x + iy$. Déterminer Ré(z') à l'aide de x et y.

En déduire l'ensemble $E = \left\{M(z) \text{ tel que } M' \in \left(O, \vec{v}\right)\right\}$.

3) Déterminer l'ensemble $F = \left\{M(z) \text{ tel que } M \text{ et } M' \text{ sont situés sur un même cercle de centre } O\right\}$.

4) On suppose dans cette question que $M \in \mathcal{C}_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$ et G le point du plan tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{GM'} = \vec{0}$.

a) Montrer que $Z_G = \dfrac{1}{3(z - i)}$.

b) En déduire que G est situé sur un cercle de centre O dont on précisera le rayon.

c) Montrer que $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OG}}\right) \equiv -\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{AM}}\right)[2\pi]$.

d) Construire alors G et M' connaissant un point M sur $\mathcal{C}_{\left(A, \frac{1}{2}\right)}$.

Exercice 3 Soit $Z = \dfrac{1 - \bar{z}}{|z|^2 + z}$.

1) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z existe.

2) Soit $z = e^{i\theta}$ où $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$. Déterminer en fonction de θ, le module et un argument de Z.

Exercice 4

On considère le nombre complexe $z = 1 + e^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi[$.

1) Calculer z^4 à partir de la forme exponentielle de z puis de l'écriture $z = 1 + e^{i\theta}$.

2) En déduire la relation $\cos^4\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{\ }\cos 2\theta + \frac{1}{\ }\cos\theta + \frac{3}{\ }$