Lycée pilote de Tunis	Sujet de Révision	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	Décembre -2019	www.ben-regaya.net

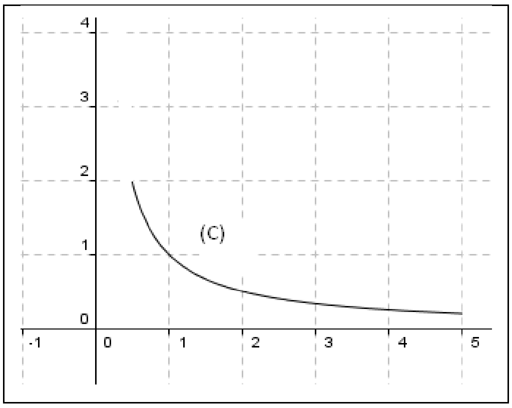
Exercice1 (C) *Vrai-Faux. Justifier*

1. Si une fonction f continue sur $\mathbb{R}$, vérifie sur $\mathbb{R}$: $(1-x)(1+3x) \leq f(x) \leq (x+1)^2$.

   Alors f est dérivable en 0 et $f'(0)=2$.

2. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout réel x on a : $f(x)-f(-x)=2x$ alors $f'(x)-f'(-x)=2$.

3. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\left[\frac{1}{2},5\right]$ telle que sa courbe (Γ) passe par les points $A(1,0)$ et $B(3,1)$. Dans la figure ci-contre, on a représenté la courbe (C) de la dérivée f' de la fonction f. Alors :



   (Γ) admet une tangente de coefficient directeur -1

   (Γ) admet une tangente de coefficient directeur $\frac{1}{2}$

   Pour tous a et b de $[1,3]$, $|f(b)-f(a)| \leq |b-a|$

4. Les solutions de l'équation $z^2-3iz-2=0$ sont réelles

5. Une racine quatrième de $-4e^{i\frac{\pi}{3}}$ est $\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}$.

Exercice2 (C)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \prec u_n \prec \frac{1}{2\sqrt{n}}$
2. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}$.
   a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.
   b) En utilisant la double inégalité $u_n \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \prec u_{n-1}$, montrer que la suite de terme général $\frac{v_n}{\sqrt{n}}$ converge vers le réel 2.

Exercice3 (C)

On considère le polynôme P à variable complexe z défini par : $P(z)=z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)$.

1. Montrer que si z_1, z_2 et z_3 sont les racines du polynôme P alors $arg(z_1)+arg(z_2)+arg(z_3) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$.
2. Montrer que l'équation (E) : $P(z)=0$ admet une solution imaginaire ib, où b est un réel que l'on détermi...

3. Déduire une factorisation du polynôme $P(z)$.
4. Résoudre alors l'équation (E).
5. Que peut-on dire du triangle dont les sommets sont les trois solutions de (E).

Exercice 4 (C)

Soit la fonction f définie sur $]-\infty,1]$ par : $f(x)=\dfrac{-2}{1+\sqrt{1-x}}$.

1. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1. Interpréter graphiquement le résultat.
2. a) Montrer que f est dérivable sur $]-\infty,1[$ et que $f'(x)\prec 0\,;\ \forall x\in\,]-\infty,1[$.

   b) Dresser le tableau de variation de f.
3. Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[-2,0[$ puis expliciter $f^{-1}(x)$.
4. a) Etudier les variations de la fonction g définie sur $]-\infty,1]$ par $g(x)=f(x)-x$.

   b) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]-\infty,1]$ une solution unique α et que $\alpha\in\,]-1,0[$.

   c) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty,1]$. En déduire la position relative de la courbe de f et de la droite $\Delta: y=x$.
5. Soit pour $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction φ définie par $\varphi(x)=-\dfrac{1}{2}f(sin^2x)$.

   a) Montrer que φ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

   b) Montrer que pour tout $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(x)=\dfrac{1}{1+cosx}$ et donner l'expression de $\varphi'(x)$.
6. On considère la suite (u_n) définie par $u_0\in\,]-1,0[$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$; $u_{n+1}=f(u_n)$ et On admet dans cette question que $\forall\, x\in\,]-1,0[\ ;\ f'(x)\le\dfrac{1}{4}$.

   a) Montrer que pour tout $x\in\,]-1,0[\ ;\ |f(x)-\alpha|\le\dfrac{1}{4}|x-\alpha|$.

   b) En déduire que pour tout $n\in\mathbb{N}$; $|u_n-\alpha|\le\left(\dfrac{1}{4}\right)^n|u_0-\alpha|$.

   c) En déduire la convergence de (u_n) vers un réel que l'on calculera.

Exercice5 (C)

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que : $z'=z^2-4z$.

1. Soient A et B les points d'affixes $z_A=1-i$ et $z_B=3+i$.

   a) Calculer les affixes des points A' et B' images des points A et B par f.

   b) On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.
2. Soit I le point d'affixe -3.

   a) Démontrer que $OMIM'$ est un parallélogramme si et seulement si $z^2-3z+3=0$.

   b) Résoudre l'équation $z^2-3z+3=0$.
3. a) Exprimer $z'+4$ en fonction de z - 2. En déduire une relation entre $|z'+4|$ et $|z-2|$ puis entre $arg(z'+4)$ et $arg(z-2)$.

   b) On considère les points J et K d'affixes respectives $z_J=2$ et $z_K=-4$. Démontrer que tous les points M

du cercle (C) de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un cercle que l'on déterminera.

c) Soit E le point d'affixe $z_E = -4-3i$. Donner la forme trigonométrique de $z_E + 4$ et démontrer à l'aide du

3. a) qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E. Préciser sous forme algébrique les affixes de ces deux points.

Exercice 6

Le plan est munie d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ (unité : 2 cm).Soit la fonction $f : x \mapsto x+\sqrt{x^2-1}$ de courbe (C).

1. Etudier la continuité et la dérivabilité de f .
2. Etudier les variations de f .
3. Soit (C') la courbe symétrique de (C) par rapport à O.

   a) Déterminer une équation cartésienne de (C') dans (O $\vec{i},\vec{j}$) .

   b) Soit la courbe (Γ) = (C) $\cup$ (C') . Montrer qu'une équation de (Γ) est : $y^2-2xy+1=0$.
4. On pose $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}$

   a) Montrer que $\left(O,\vec{i},\vec{u}\right)$ est un repère du plan.

   b) Déterminer une équation de (Γ) dans $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.
5. Soit g définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=f\left(\frac{1}{cosx}\right)$.

   a)Montrer que g est une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

   b) Etudier la continuité et la dérivabilité de g.

   c) Etudier les variations de g.

   d) Tracer dans un autre repère orthonormé les courbes de g et de sa réciproque.

Exercice 7

I- Soit la fonction f définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\sqrt[3]{tan^2(x)}$.

1. a) Montrer que f est continue sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ et dérivable sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

   b) Calculer $f'(x)$ pour x élément de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et montrer que f n'est pas dérivable à droite en 0.
2. a) Montrer que f réalise une bijection de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b) Calculer $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$ et $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un même repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

   c) Sans calculer $f^{-1}(2)$, prouver que $f^{-1}(2) \succ \frac{\pi}{3}$ en déduire que $f^{-1}(2) \succ 1$.
3. a) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $(f^{-1})'(x)$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable à droite en 0.

II- On pose $H(x)=\dfrac{f^{-1}(x)-\frac{\pi}{4}}{x-1}$ et $H(1)=a$.

1. Déterminer l'ensemble de définition D de H.
2. Déterminer a pour que H soit continue sur D.

III- On pose $\varphi(x)=f^{-1}(x^2)+f^{-1}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

1. a) Montrer que φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $\varphi'(x)$.

   b) Déduire que pour tout $x\in]0,+\infty[$ $\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ $f^{-1}(n)+f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{\pi}{2}$.
2. Démontrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ et $\forall\ k\in\{0,1,2,\dots n\}$: $f^{-1}(n)\le f^{-1}(n+k)\le f^{-1}(2n)$.
3. Soit la suite (u_n) définie pour n non nul par : $u_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+k}\right)$.

   Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}^*$ $f^{-1}\left(\dfrac{1}{2n}\right)\le u_n\le f^{-1}\left(\dfrac{1}{n}\right)$. Déduire la limite de la suite (u_n).

IIII- On pose $h(x)=f^{-1}(x+1)$

1. Etudier et représenter graphiquement h.
2. Montrer que : $\forall\, x\in[-1,+\infty[$; $0\le h(x)\le\dfrac{5}{3}$.
3. Montrer que l'équation $h(x)=x$ admet une unique solution α dans $[-1,+\infty[$ (on admet que $h'(x)\prec 1,\ \forall x\succ 1$). Prouver que $1\le\alpha\le\dfrac{5}{3}$.
4. On définit la suite (v_n) par : $\begin{cases} v_0=\dfrac{4}{3}\\ v_{n+1}=h(v_n)\end{cases}$

   a) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*$ $1\le v_n\le\dfrac{5}{3}$

   b) Montrer que : $\forall\ x\in\left]1,\dfrac{5}{3}\right[$ on a : $|h'(x)|\le\dfrac{4}{5}$.

   c)Montrer que : $\forall\, n\in\mathbb{N}$ $|v_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{4}{5}|v_n-\alpha|$.Conclure sur la convergence de (v_n).

Exercice8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=(1+x)\sqrt{1-x^2},\ si\ -1\le x\le 1\\ f(x)=tan\left(\dfrac{\pi}{2x^2}\right),\ si\ x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[\end{cases}$. On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Partie A

1. a) Montrer que f est dérivable sur $]-1,1[$ et pour $x\in]-1,1[$: $f'(x)=(1-2x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1. Dresser le tableau de variation de f sur $[-1,1]$.

2. Etudier les variations de *f* sur $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$.
3. Construire (C).
4. Soit g la restriction de *f* à $I=\left[-1,\frac{1}{2}\right]$. Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera puis tracer la courbe (C′) de g^{-1}.

Partie B

Soit h la restriction de *f* à $\left]1,+\infty\right[$.

1. a) Montrer que h réalise une bijection de $\left]1,+\infty\right[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

   b) Calculer $h^{-1}(1)$ *et* $h^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

   c) Construire la courbe de h^{-1}.

   d) Montrer que h^{-1} est dérivable sur K et $\forall\, x\in K:\ \left(h^{-1}\right)'(x)=\dfrac{-\left(h^{-1}(x)\right)^3}{\pi\left(1+x^2\right)}$.

2. a) Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $h(x)=\sqrt{p}$ admet une solution unique u_p.

   b) Montrer que pour p strictement positif la suite $\left(u_p\right)$ est décroissante. En déduire qu'elle converge et préciser sa limite.

   c) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $s_n=\dfrac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}u_{n+k}$. Montrer que $h^{-1}\left(\sqrt{2n}\right)\le s_n\le u_n$ puis déterminer la limite de la suite s.

Exercice9

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct.
On considère l'équation (E) : $z^2-2z\sqrt{3}+4=0$.

1. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
2. On considère la suite $\left(M_n\right)$ des points d'affixes $z_n=2^n e^{i(-1)^n\frac{\pi}{6}}$, définie pour $n\ge 1$.

   a) Vérifier que z_1 est une solution de (E).

   b) Écrire z_2 et z_3 sous forme algébrique.

   c) Placer dans le repère les points M_1, M_2, M_3 et M_4 et tracer les segments $\left[M_1M_2\right],\left[M_2M_3\right]$ et $\left[M_3M_4\right]$.
3. Montrer que, pour tout entier $n\ge 1$, $z_n=2^n\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{(-1)^n i}{2}\right)$
4. a) Calculer les longueurs M_1M_2 et M_2M_3.

   b) Montrer que pour tout entier $n\ge 1$, $M_nM_{n+1}=2^n\sqrt{3}$
5. On note $l_n=M_1M_2+M_2M_3+\ldots+M_nM_{n+1}$.

   a) Montrer que, pour tout entier $n\ge 1$, $l_n=2\sqrt{3}\left(2^n-1\right)$.

   b) Déterminer le plus petit entier n tel que $l_n\ge 1000$.

Exercice10

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On prendra pour unité graphique 5 cm. On désigne par A et K les points d'affixes respectives 1 et $1+i$, et par I et J les points d'affixes respectives i et $-i$.

1. On désigne par (Γ) le cercle de centre O et de rayon 1. On considère sur ce cercle un point N distinct de I et de J. On note t une mesure de l'angle $(\vec{u},\overrightarrow{ON})$.

   a) Quelle est la nature du triangle INJ ?

   b) Montrer que, pour tout réel t tel que $t \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$), le nombre complexe $\frac{e^{it}+i}{e^{it}-i}$ est imaginaire pur.

   Dans la suite, on désigne par (C) le cercle de centre A et de rayon 1.

2. On nomme r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

   Tracer (C) et son image (C') par la rotation $r$sur une même figure, qui sera complétée par la suite.

   a) On note M' l'image par r d'un point quelconque du plan. Exprimer l'affixe z' de M'en fonction de l'affixe z du point M.

   b) Déterminer l'antécédent H de K par r.

3. Dans cette question, M est un point quelconque du cercle (C), distinct de H et de K. On note t une mesure de l'angle$\left(\vec{u},\overrightarrow{AM}\right)$.

   a) Montrer que $\frac{z'-(1+i)}{z-(1+i)}=i\frac{e^{it}+i}{e^{it}-i}$.

   b) Montrer finalement que les points M, K et M' sont alignés.

   c) En déduire une construction de M' connaissant M.

Exercice11

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct$\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On note A le point d'affixe1 et par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique. A tout point $M(z)$ on associe le point $M'(z')$ telle que $z'=2z-z^2$

1. Déterminer les points M tels que $M'=M$.

2. Déterminer l'ensemble des point $M(z)$ tels que $arg\left(z'\right)-2arg\left(z\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

3. Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z'=1+e^{2i\theta}$ où $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Vérifier que les points images des solutions sont symétriques par rapport a un point fixe.

4. Dans cette question $M\in\mathscr{C}\setminus\left\{A\right\}$.

   a) Montrer que $AM=MM'$.

   b) Montrer que $\frac{z'-1}{z}$ est un réel.

   c) En déduire que A et M'sont symétriques par rapport à la tangente Δ au cercle $\mathscr{C}$ au point M.

Exercice 12

Soit ABC un triangle rectangle en C tel que $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ et soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soient D =r(C) et $E=r^{-1}(B)$. On désigne par I le milieu de [CD].

1. a) Monter qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A)=D$ et $f(C)=A$.

   b) Caractériser f .

2. Soit $g = f \circ r$

a) Montrer que g est une translation

b) Soit $F = g(E)$.

Montrer que $f(B) = F$ et en déduire la nature du triangle BIF.

c) Montrer que les points C, A et F sont alignés.

3. Soit G l'image de I par la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

a) Montrer qu'il existe un unique antidéplacement φ qui transforme C en D et I en G .

b) Montrer que φ est une symétrie glissante que l'on caractérisera.

Exercice 13

On considère un carré $ABCD$ de centre I tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par R_I , R_D et R_B les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ de centres respectifs I , D et B et par S_I la symétrie centrale de centre I .

1. Soit $g = R_D \circ S_I \circ R_B$

a) Déterminer les droites Δ_1 et Δ_2 telles que $R_D = S_{\Delta_1} \circ S_{(BD)}$ et $S_I = S_{(BD)} \circ S_{\Delta_2}$.

b) En déduire que $R_D \circ S_I$ est une rotation que l'on caractérisera.

c) Déterminer $g(B)$ et montrer que g est une translation dont on donnera le vecteur.

2. M est un point du demi-cercle de diamètre $[DC]$ qui passe par I. La perpendiculaire à (DM) qui passe par A, coupe (DM) en M'. Déterminer $R_1\langle(DM)\rangle$ et $R_1\langle(CM)\rangle$. Déduire $R_1(M)$.

Exercice14

Dans le plan P orienté, on considère un triangle équilatéral ABC tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$. Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB) , on désigne par I , J et K les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BD]$ et $[BC]$ et par A' le symétrique de A par rapport à (BD).

1. a) Montrer qu'il existe un unique déplacement que l'on note R_1 tel que R_1 (D) = B et $R_1(B) = C$.

b) Montrer que R_1 est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2. Soit R_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. On pose $f = R_2 \circ R_1$.

Vérifier que $f(B) = D$ et en déduire que f est la symétrie centrale de centre J.

3. On considère l'application $g = f \circ S_{(AB)}$.

a) Montrer que $g(C) = B$ et $g(B) = D$. En déduire que g n'est pas une symétrie orthogonale.

b) Montrer que g est une symétrie glissante et la caractériser.

Exercice1 ***Vrai-Faux. Justifier***

1. $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)(1+3x)=1$ et $\lim\limits_{x\to 0}\left(1+x^2\right)=1$ donc par comparaison $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ et comme *f* est continue sur $\mathbb{R}$ alors forcément $f(0)=1$.

   Pour la dérivabilité de *f* en 0 : Pour $x\neq 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\dfrac{f(x)-1}{x}$.

   Or $(1-x)(1+3x)\le f(x)\le (x+1)^2 \Leftrightarrow (1-x)(1+3x)-1\le f(x)-1\le (x+1)^2-1$

   $\Leftrightarrow 2x-3x^2\le f(x)-1\le x^2+2x \Leftrightarrow 2-3x\le \dfrac{f(x)-1}{x}\le x+2$ pour $x\succ 0$ et $x+2\le \dfrac{f(x)-1}{x}\le 2-3x$ si $x\prec 0$ et donc par comparaison $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-1}{x}=2$ *f* est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0)=2$ et

   $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-1}{x}=2$ *f* est dérivable à gauche en 0 et $f_g'(0)=2$. ceci prouve que *f* est dérivable en 0 et que $f'(0)=2$. Proposition correcte.

2. La fonction $x\mapsto f(-x)$ est une fonction de la fonction $x\mapsto -x$ par la fonction *f*.

   Comme *f* est dérivable sur , il en est de même pour la fonction g et on a : $g'(x)=f'(-x)\times(-1)=-f'(-x)$

   donc la proposition est fausse .

3. La fonction dérivée est strictement négative donc la courbe (Γ) n'admet pas de tangente de pente négative.

   Proposition fausse.

   f est dérivable sur $\left[\dfrac{1}{2},5\right]$. D'après le théorème des accroissements finis il existe $c\in\left]1,3\right[$ tel que

   $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=f'(c)$ signifie il existe $c\in\left]1,3\right[$ tel que $f'(c)=\dfrac{1}{2}$. Donc (Γ) admet une tangente de pente $\dfrac{1}{2}$.

   Proposition correcte.

   f est dérivable sur $[1,3]$ et pour tout $x\in[1,3]$, $f'(x)\le 1$ (d'après le graphique) donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis : pour tous réels *a* et *b* de $[1,3]$; $|f(b)-f(a)|\le 1\times|b-a|$. Proposition correcte.

4. La somme des racines de cette équation est $-\dfrac{b}{a}=3i$ donc les racines ne peuvent être réelle.

5. $\left(\sqrt{2}e^{i\frac{11\pi}{6}}\right)^4=4e^{i\frac{22\pi}{3}}=4e^{i\left(\frac{22\pi}{3}-8\pi\right)}=4e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}\right)}=-4e^{i\left(-\frac{2\pi}{3}+\pi\right)}=-4e^{i\left(\frac{\pi}{3}\right)}$. Proposition correcte.

Exercice2

1. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Or pour tout $n\ge 1$; $\sqrt{n}\le\sqrt{n}\prec\sqrt{n+1}$ et

   $\sqrt{n}\prec\sqrt{n+1}\le\sqrt{n+1}$ donc par somme , on obtient :

   $2\sqrt{n}\prec\sqrt{n}+\sqrt{n+1}\prec 2\sqrt{n+1}\Leftrightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\prec\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\prec\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\Leftrightarrow\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\prec u_n\prec\dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{n}}=0$ donc le théorème de comparaison permet de dire : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

3. a) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $v_n=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

Or $1 \le k \le n \Leftrightarrow 1 \le \sqrt{k} \le \sqrt{n} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{k}} \le 1$

Par sommation, on obtient : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \le \sum_{k=1}^{n} 1 \Leftrightarrow n \times \frac{1}{\sqrt{n}} \le v_n \le n \times 1 \Leftrightarrow \sqrt{n} \le v_n \le n$.

On a $v_n \ge \sqrt{n}$ et comme $\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ alors par comparaison $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

b) On a d'après 1. pour tout naturel non nul n :

$$\frac{1}{2\sqrt{n+1}} \prec u_n \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{n+1}} \prec u_n \\ u_n \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{n}} \prec u_{n-1} \\ u_n \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \end{cases} \Leftrightarrow u_n \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \prec u_{n-1} .$$

c) On peut écrire pour tout réel non nul k, $u_k \prec \frac{1}{2\sqrt{k}} \prec u_{k-1}$.

On peut donc écrire :

Pour $k=1$ $\quad u_1 \prec \frac{1}{2\sqrt{1}} \prec u_0$

Pour $k=2$ $\quad u_2 \prec \frac{1}{2\sqrt{2}} \prec u_1$

.
.
.

Pour $k=n$ $\quad u_n \prec \frac{1}{2\sqrt{n}} \prec u_{n-1}$

Par sommation, on obtient $u_1 + u_2 + \ldots + u_n \prec \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \prec u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n \prec \frac{1}{2} v_n \prec u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}$$

Or $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \sqrt{n+1} - 1$ et

$u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1} = \sqrt{1} - \sqrt{0} + \sqrt{2} - \sqrt{1} + \ldots + \sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \sqrt{n} - \sqrt{0} = \sqrt{n}$

Ainsi $\sqrt{n+1} - 1 \prec \frac{1}{2} v_n \prec \sqrt{n}$.

d) On a : $\sqrt{n+1} - 1 \prec \frac{1}{2} v_n \prec \sqrt{n} \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{n+1} - 1\right) \prec v_n \prec 2\sqrt{n} \Leftrightarrow 2\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \prec \frac{v_n}{\sqrt{n}} \prec 2$

$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n} \times \sqrt{1 + \frac{1}{n}}}{\sqrt{n}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1$ et $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ alors $\lim_{n \to +\infty} 2\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 2$.

Le théorème de comparaison permet de dire que $\lim_{n \to +\infty} \frac{v_n}{\sqrt{n}} = 2$.

Exercice3

1. Montrer que si z_1, z_2 et z_3 sont les racines du polynôme P alors $P(z) = 1 \times (z - z_1) \times (z - z_2) \times (z - z_3)$ après développement $P(z) = z^3 - (z_1 + z_2 - z_3) z^2 + \left(z_1 z_2 + z_3 (z_1 + z_2)\right) z - (z_1 z_2) z_3$. Ainsi par identification : $-(z_1 z_2) z_3 = -10(1+i)$ ou encore $z_1 z_2 z_3 = 10(1+i)$.

Donc $arg\left(z_1z_2z_3\right)\equiv arg\left(10(1+i)\right)[2\pi]\Leftrightarrow arg\left(z_1z_2z_3\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

$\Leftrightarrow arg\left(z_1\right)+arg\left(z_2\right)+arg\left(z_3\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$.

2. On pose $z=ib$, avec b réel.

$$P(z)=(ib)^3-(1+2i)(ib)^2+3(1+i)(ib)-10(1+i)=-ib^3-(1+2i)(b)^2+(3+3i)(ib)-10(1+i)$$
$$=-ib^3+b^2+2ib^2+3ib-3b-10-10i=\left(b^2-b-10\right)+i\left(b^3+2b^2+3b-10\right)$$

$P(z)=0\Leftrightarrow\begin{cases}b^2-b-10=0 & (1)\\ b^3+2b^2+3b-10=0 & (2)\end{cases}$. L'équation (1) donne -2 et 5 pour solution et seul le réel -2 vérifie l'équation (2).

En voit donc que $-2i$ est la solution souhaitée.

3. On peut écrire pour tout complexe z : $P(z)=(z+2i)\left(z^2+bz+c\right)=z^3+(a+2i)z^2+(2ia+b)+2ib$.

Légalité des polynômes permet décrire : $\begin{cases}a+2i=-1-2i\\ 2ia+b=3+3i\\ 2ib=-10-10i\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1-4i\\ b=-5+5i\end{cases}$

Ainsi $P(z)=(z+2i)\left(z^2-(1+4i)z-5+5i\right)$.

4. $P(z)=0\Leftrightarrow z=-2i$ ou $z^2-(1+4i)z-5+5i=0$ le discriminant de cette équation est

$\Delta=(1+4i)^2-4\times(-5+5i)=5-12i=(3-2i)^2$ et donc une racine carrée de Δ est $\delta=3-2i$. Les solutions sont donc $z_1=\frac{-b-\delta}{2a}=-1+3i$ et $z_2=\frac{-b+\delta}{2a}=2+i$.

L'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de cette équation est $\{-2i,2+i,-1+3i\}$.

5. Posons $A(-2i)$, $B(2+i)$ et $C(-1+3i)$.

$$\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{-2i-2-i}{-1+3i-2-i}=\frac{-2-3i}{-3+2i}=\frac{2+3i}{3-2i}=\frac{(2+3i)\times(3+2i)}{13}=i.$$

Donc $\frac{AB}{CB}=\left|\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}\right|=1$ donc $AB=CB$ et $\frac{z_A-z_B}{z_C-z_B}=\frac{z_{\overrightarrow{BA}}}{z_{\overrightarrow{BC}}}=i$ qui est imaginaire pur donc $\overrightarrow{BA}\perp\overrightarrow{CB}$. Le triangle est rectangle et isocèle en B.

Exercice 4

1. $x\prec 1$, $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{\frac{-2}{1+\sqrt{1-x}}+2}{x-1}=\frac{2\sqrt{1-x}}{(x-1)\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{-2}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}$

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{-2}{\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)}=-\infty$. f n'est pas dérivable à gauche en 1.

La demi-tangente à la courbe de f au point d'abscisse -1 a pour équation : $\begin{cases}x=1\\ y\geq-2\end{cases}$.

2. La fonction $x\mapsto 1-x$ est polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $]-\infty,1[$ donc la fonction $x\mapsto 1+\sqrt{1-x}$ est dérivable sur $]-\infty,1[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle donc f est dérivable sur $]-\infty,1[$ quotient de deux fonctions dérivables.

$\forall x \in]-\infty,1[$, $f'(x) = -2\dfrac{-\dfrac{(-1)}{2\sqrt{1-x}}}{\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2} = -\dfrac{1}{2\sqrt{1-x}\left(1+\sqrt{1-x}\right)^2} \prec 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{-2}{1+\sqrt{1-x}} = 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty,1]$ et elle est a valeurs dans $[-2,0[$.

3. f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,1]$ donc elle réalise une bijection de $]-\infty,1]$ sur $f\left\langle]-\infty,1] \right\rangle = [-2,0[$. f^{-1} la fonction réciproque de f existe définie sur $[-2,0[$.

On a : $\begin{pmatrix} f^{-1}(x) = y \\ x \in [-2,0[\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} f(y) = x \\ x \in]-\infty,1] \end{pmatrix}$

$f(y) = x \Leftrightarrow \dfrac{-2}{1+\sqrt{1-y}} = x \Leftrightarrow 1+\sqrt{1-y} = \dfrac{-2}{x} \Leftrightarrow \sqrt{1-y} = \dfrac{-2}{x} - 1 \Leftrightarrow 1-y = \left(\dfrac{2}{x}+1\right)^2$. Finalement

$f^{-1}(x) = 1 - \left(\dfrac{2}{x}+1\right)^2$.

4. a) Soit pour $x \le 1$, $g(x) = f(x) - x$. g est dérivable sur $]-\infty,1[$ et sur cet intervalle $g'(x) = f'(x) - 1 \prec 0$ vu que $f'(x) \prec 0$ sur $]-\infty,1[$.

b) L'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation $g(x) = 0$.

Or g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,1]$.

$g\left\langle]-\infty,1] \right\rangle = \left[g(1), \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) \right[= [-3,+\infty[$ et comme cet intervalle contient zéro alors l'équation $g(x) = 0$ admet dans $]-\infty,1]$ une solution unique α.

Encadrement de α :

$g(-1) = f(-1) + 1 = \dfrac{-2}{1+\sqrt{2}} + 1 \succ 0$ et $g(0) = f(0) = -1 \prec 0$ alors par le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]-1,0[$.

Conclusion : L'équation $f(x) = x$ admet dans $]-1,0[$ une solution unique α .On note que $f(\alpha) = \alpha$.

g est strictement décroissante sur $]-\infty,1]$ et $g(\alpha) = 0$ alors g est strictement positive sur $]-\infty,\alpha[$ et strictement négative ailleurs.

et donc sur $]-\infty,\alpha[$ $f(x) \succ x$ et donc la courbe de f est au dessus de Δ et sur $]\alpha,+\infty[$, $f(x) \prec x$ et donc la courbe de f est en dessous de Δ.

5. Soit pour $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ la fonction φ définie par $\varphi(x) = -\dfrac{1}{2} f(\sin^2 x)$.

La fonction $u :\ x \mapsto \sin^2(x)$ est restriction à $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ donc elle est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $u\left\langle \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right\rangle \subset [0,1[$ puisque pour $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $0 \le \sin x \prec 1 \Leftrightarrow 0 \le \sin^2 x \prec 1$.

et comme f est dérivable sur $]-\infty,1[$ contenant $[0,1[$ alors la fonction $\varphi = -\dfrac{1}{2} \times f \circ u$ est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b) pour $x \in \left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $f\left(\sin^2 x\right) = \dfrac{-2}{1+\sqrt{1-\sin^2 x}} = \dfrac{-2}{1+\sqrt{\cos^2 x}} = \dfrac{-2}{1+|\cos x|} = \dfrac{-2}{1+\cos x}$ car sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$,

$cosx \geq 0$.

pour tout réel x de $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi(x) = -\frac{1}{2}\times\frac{-2}{1+cosx} = \frac{1}{1+cosx}$ et donc $\varphi'(x) = \frac{sinx}{(1+cosx)^2}$.

6. a) f est dérivable sur $]-\infty,1]$ et pour tout réel x de $]-1,0[$ $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$. D'après le théorème des inégalités des accroissements finis : Pour tous réels a et b de $]-1,0[$; $|f(b)-f(a)| \leq \frac{1}{4}|b-a|$.

En particulier pour tout $x \in]-1,0[$; $|f(x)-\alpha| \leq \frac{1}{4}|x-\alpha|$ vu que $\alpha \in]-1,0[$ et $f(\alpha)=\alpha$.

b) **Déduction :**

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $u_n \in]-1,0[$.

Vrai pour $n = 0$ car $u_0 \in]-1,0[$.

Supposons pour $n \in \mathbb{N}$; $u_n \in]-1,0[$ et montrons que $u_{n+1} \in]-1,0[$.

On a $f\langle]-1,0[\rangle =]f(0), f(-1)[\subset]-1,0[$.

$u_n \in]-1,0[$ donc $f(u_n) \in]-1,0[\Leftrightarrow u_{n+1} \in]-1,0[$ ce qu'il faut prouver.

Ainsi, on vient de prouver que tous les termes de la suite (u_n) sont dans $]-1,0[$ alors l'inégalité précédente devient : $|f(u_n)-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha| \Leftrightarrow |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ pour tout naturel n.

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0-\alpha|$.

Pour $n = 0$ $|u_0-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0 |u_0-\alpha|$ vrai.

Supposons pour $n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0-\alpha|$.

En multipliant par $\frac{1}{4}$, on obtient : $\frac{1}{4}\times|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$ et comme $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{4}|u_n-\alpha|$ on en déduit que $|u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$. Ce qu'il faut prouver.

On vient de prouver que pour tout naturel n, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0-\alpha|$.

c) On a pour tout naturel n, $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0-\alpha|$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n |u_0-\alpha| = 0$ car $-1 \prec \frac{1}{4} \prec 1$ donc la suite (u_n) converge et sa limite est α.

Exercice5

1. a) $z_{A'} = (1-i)^2 - 4(1-i) = -2i - 4 + 4i = -4 + 2i$ et $z_{B'} = 9 + 6i - 1 - 12 - 4i = -4 + 2i$.

b) appelons u et v les affixes des points U et V en question : $u' = u^2 - 4u$ et $v' = v^2 - 4v$; leurs images sont identiques si

$u' = v' \Leftrightarrow u^2 - 4u = v^2 - 4v \Leftrightarrow u^2 - v^2 - 4u + 4v = 0 \Leftrightarrow (u-v)(u+v) - 4(u-v) = 0$.

$\Leftrightarrow (u-v)(u+v-4) = 0$

On a donc soit $u = v$, soit $u+v=4 \Leftrightarrow \frac{u+v}{2}=2$, et dans ce cas le milieu de $[UV]$ a pour affixe 2 et l'un est l'image de l'autre par la symétrie de centre 2.

2. a. $I(-3)$. *OMIM'* est un parallélogramme si et seulement si
$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M'I} \Leftrightarrow z-0=-3-z' \Leftrightarrow z'+z+3=0 \Leftrightarrow z^2-3z+3=0$.

   b) $z^2-3z+3=0$: $\Delta = 9-12=-3=3i^2$ d'où $z_1 = \frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $z_2 = \frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. a) $(z'+4) = z^2-4z+4=(z-2)^2 \Rightarrow \begin{cases} |z'+4| = |z-2|^2 \\ arg(z'+4) = 2arg(z-2)+2k\pi \end{cases}$.

   b) Soit M un point du cercle (C) de centre $J(2)$ et de rayon 2, son affixe z est telle que $|z-2|=2$, et son image M' est telle que $|z'+4| = 2^2 = 4$ d'où M' est sur le cercle de centre $K(-4)$, de rayon 4.

   c) $z_E+4=-3i=3e^{-i\frac{\pi}{2}}$; si E est l'image d'un point z, on a

$$arg(z_E+4) = 2arg(z-2)+2k\pi \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} = 2arg(z-2)+2k\pi \Leftrightarrow arg(z-2) = -\frac{\pi}{4}-k\pi .$$

Sur le cercle trigo il y a donc deux arguments possibles, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{\pi}{4}+\pi=\frac{3\pi}{4}$. Il reste à trouver les modules $|z_E+4| = |-3i| = 3 = |z-2|^2 \Rightarrow |z-2| = \sqrt{3}$. Conclusion on a $z-2=\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ou $z-2=\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}}$, soit

$$z = 2+\sqrt{3}e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2+\sqrt{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4-\sqrt{6}}{2}+i\frac{\sqrt{6}}{2} \text{ ou}$$

$$z = 2+\sqrt{3}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2+\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{4+\sqrt{6}}{2}-i\frac{\sqrt{6}}{2} .$$