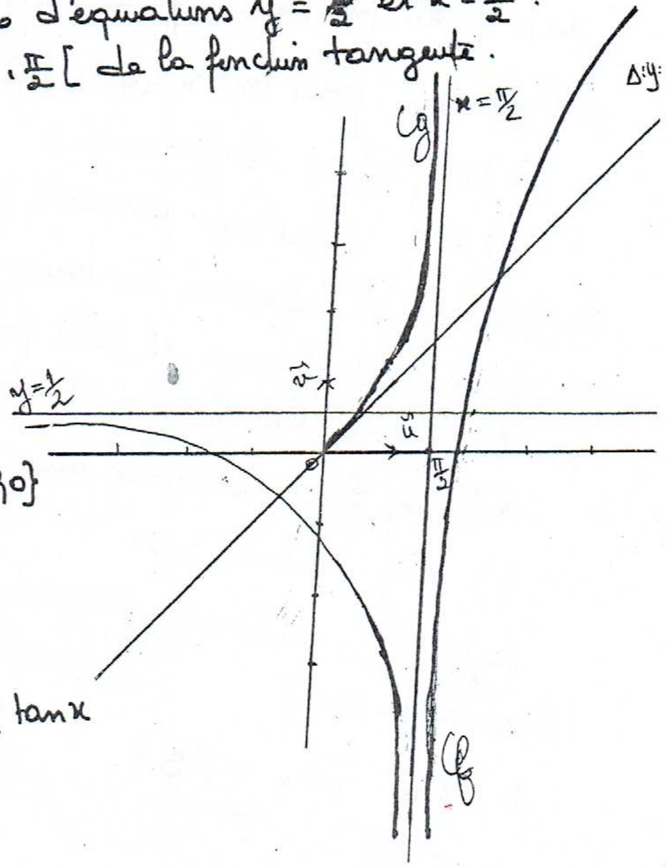
Exercice n° 1

Dans la figure ci-contre C_f est la représentation graphique d'une fonction f admettant une branche infinie parabolique de direction la droite $\Delta : y = x$ et deux asymptotes d'équations $y = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{\pi}{2}$.

C_g est la courbe de la restriction à $[0, \frac{\pi}{2}[$ de la fonction tangente.



1°) Par lecture graphique

a) Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x)$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) En déduire $\lim_{x \to -\infty} \tan(\pi f(x))$ et

$\lim_{x \to 0^+} (\tan x)\, f\left(\frac{1}{\tan x}\right)$

2°) Soit h la fonction définie sur $]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$

par $h(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}$

a) Etudier la parité de h

b) Mq $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on a $\sin x < x < \tan x$

c) En déduire que $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$

on a $0 < h(x) < \frac{1 - \cos x}{\sin x}$.

d) Montrer alors que h est prolongeable par continuité en 0.

3°) Mq l'éq : $2h(x) - 1 = 0$ admet au moins une solution dans $[\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}]$

Exercice n° 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} \sqrt{x^2+5} + x - 5 & \text{si } x \leq 2 \\ \left(x - \frac{4}{x}\right) \sin\left(\frac{x}{x^2-4}\right) & \text{si } x > 2 \end{cases}$

1°) Déterminer : $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$

et Interpréter les résultats graphiquement

2°) Mq pour tout $x \in]2, +\infty[$ $\frac{4}{x} - x \leq f(x) \leq x - \frac{4}{x}$ et en déduire

que f est continue en 2.

3°) Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, 0[$ par $g(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$

a) Déterminer : $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} g(x)$ et montrer que g est continue sur $[-\frac{\pi}{2}, 0[$

(b°) Mq $g(x) = 4\sin x$ admet au moins une solution dans $]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{6}[$

Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1} - \sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ 1 + x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1°) a) Mq pour tout $x < 0$ $|f(x) - 1| \leq |x|$

b) Mq f est continue en 0

c) Mq $f(x) = 0$ possède une solution unique α dans $]0,1[$

2°) Soit g une fonction continue sur IR dont le tableau de variation est donné ci-dessous et telle que $g(0) = 1$ et $0 < g(-1) < \alpha$

on considère la fonction h définie par $h(x) = f \circ g(x)$.

x	$-\infty$		$+\infty$
g	0	$\nearrow$ 1	$+\infty$

a) Mq h est continue sur IR.

b) Mq $h(-1) > 0$.

c) Mq $h(x) = 0$ possède une solution unique β dans $]-1, 0[$

d) Mq $\alpha = g(\beta)$

Exercice n°4

I/ Soit la fonction f définie sur IR par : $\begin{cases} f(x) = 1 + (x-1)\sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x - \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2°) Mq f est continue en 1.

II/ Dans la figure ci-contre, $\mathscr{C}_g$ est la courbe représentative d'une fonction g définie sur IR* telle que les droites $\Delta : x = 0$ et $\Delta' : y = \frac{1}{2}x$ sont deux asymptotes de $\mathscr{C}_g$

1°) Déterminer graphiquement $g(]0,1])$

2°) Vérifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$. En déduire $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{g \circ g(x)}{x}$.

3°) On donne $g(x) = \frac{x^2 + 1}{2x}$

Mq pour tout $x \in]0,1]$ $f \circ g(x) = x$.