Lycée Hédi Ali Sfax (Mme Triki Ikhlas)

Série d'exercices (C_2)

4 Maths 1

Exercice n°1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{9+x^2}-3}{x} & \text{si } x<0 \\ f(x) = \dfrac{x^3 \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}{1+x^2} & \text{si } x>0 \end{cases}$

1°) a) Montrer que pour tout $x>0$

$-x^3 \leq f(x) \leq x^3$

b) En déduire $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$.

c) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0 et définir la fonction g

2°) Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}$

3°) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Interpréter les résultats.

4°) Soit h la fonction définie sur $]-\infty, 1[$ par $h(x) = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}\right)$

a) Montrer que h est continue sur $]-\infty, 1[$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$

Exercice n°2

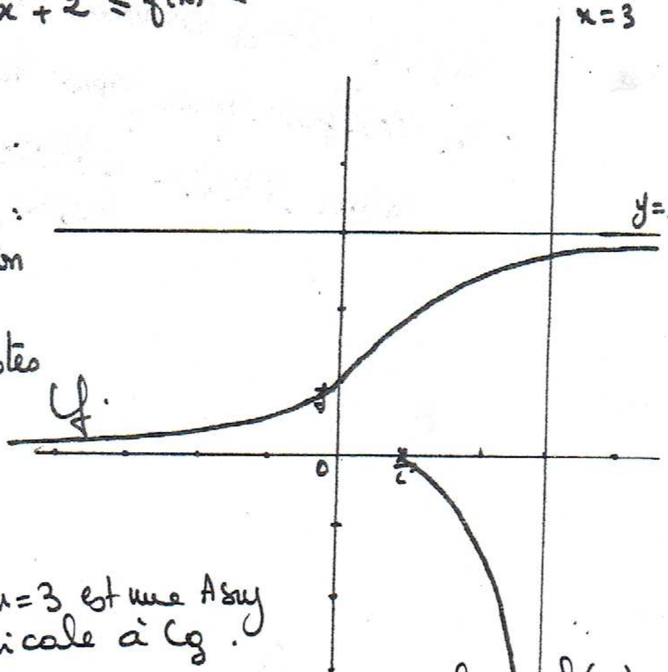
Soit f la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} - x & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^3 - 4x + 2 + x\cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{si } x> \end{cases}$

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + 2x$

2°) a) Montrer que pour $x>0$, $x^3 - 5x + 2 \leq f(x) \leq x^3 - 3x + 2$.

b) Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

c) Montrer que f est continue en 0.



Exercice n°3 :

Dans le graphique ci-contre : $\mathcal{C}_f$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$

$\Delta : y = 0$ et $\Delta' : y = 3$ sont deux asymptotes horizontales à $\mathcal{C}_f$.

$\mathcal{C}_g$ est la courbe représentative d'une fonction g définie sur $]1, 3[$, $D : x = 3$ est une Asy verticale à $\mathcal{C}_g$.

① On désigne par $h = f \circ g$.

a) Mq h est continue sur $[1, 3[$, b) Calculer $h(1)$ et déterminer $\lim\limits_{x \to 3^-} h(x)$

... les réels x tq $f(x) \in [1,3[$ ...

② Soit $k = g \circ f$. ...

c) Mq k est continue sur $\mathbb{R}$ et ...

Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x + \cos(\pi x)}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1°) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2°) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

3°) Soit g la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $\begin{cases} g(x) = f\left(\dfrac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ g(\frac{\pi}{2}) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Montrer que g est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}]$

Exercice n°5 :

Soit f la fonction définie sur $[-\frac{1}{4}, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{1+4x} - 1}{2x} & x \neq 0 \\ f(0) = 1. \end{cases}$

1°) a) Montrer que f est continue sur $[-\frac{1}{4}, +\infty[$

b) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$, Interpréter graphiquement.

2°) Soit la fonction g définie sur $]0, 2]$ par $g(x) = \dfrac{1-x}{x^2}$ et $h = g \circ f$.

a) Déterminer D_h.

b) Montrer que pour tout $x \in D_h$, $h(x) = x$.

c) Déduire $g\left(\dfrac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$.

3°) Soit la fonction F définie sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ par $\begin{cases} F(x) = f\left(\frac{1}{4}\tan^2 x\right) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ F(\frac{\pi}{2}) = 0. \end{cases}$

a) Mq F est continue sur $[\frac{\pi}{2}, \pi]$.

b) vérifier que pour tout $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$

on a $F(x) = \dfrac{2\cos x}{\cos x - 1}$.