Lycée pilote de Tunis	**Les accroissements finis**	*Terminales maths & s-exp*
Mr Ben Regaya. A	**+ Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1

Soit a et b réels tels que $0 \prec a \prec b$ et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)=0$.

Soit un réel de $]a,b[$. On appelle D_t la droite passant par l'origine et le point de coordonnées $(t, f(t))$.

1. Soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$. Etudier les domaines de définition et de continuité de g. Montrer que g est dérivable sur $]a,b[$ et donner la valeur de $g(a)$.
2. Calculer g'.
3. Énoncer le théorème de Rolle.
4. Montrer qu'il existe $t \in]a,b[$, $f'(t)=\dfrac{f(t)}{t}$.
5. Déterminer le coefficient directeur de la droite D_t pour $t \in]a,b[$:
6. En déduire une interprétation graphique du résultat obtenu précédemment.

Exercice 2

Soit la fonction f définie sur $[1,+\infty[$ par : $f(x)=sin\left(\dfrac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}\right)$. (C) est la courbe de f dans un repère du plan.

1. a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1. Interpréter graphiquement le résultat.

   b) montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$.

   c) Montrer qu'il existe un réel $c \in]1,2[$ tel que $f'(c)=1$.
2. a) Donner en fonction de x le réel $f'(x)$.

   b) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[2,5]$, $|f'(x)| \le \dfrac{\pi}{4}$. En déduire que pour tout réel $x \in [2,5]$:

   $|f(x)-1| \le \dfrac{\pi}{4}(x-2)$.

Exercice 3

Soit la fonction définie par : $f(x)=x-cosx$.

1. Prouver que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique x_0 et que $x_0 \in \left]\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{4}\right[$.
2. Montrer qu'il existe $c \in \left]x_0,\dfrac{\pi}{4}\right[$ telle que : $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left(\dfrac{\pi}{4}-x_0\right)f'(c)$.
3. Montrer que $f'(c) \succ \dfrac{3}{2}$ et en déduire que : $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) \prec x_0 \prec \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 4

Soient *f, g* deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$.

1. Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $g'(c)\left(f(b)-f(a)\right)=f'(c)\left(g(b)-g(a)\right)$.
2. En déduire que si $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ alors $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=l$

Exercice 5

Soit *f* une fonction dérivable et de dérivée continue sur $[0,1]$. On suppose que $f(0) = 0$ et que $f'(x)\succ 0$ pour tout $x\in[0,1]$. Montrer qu'il existe $m\succ 0$ tel que $f(x)\geq m$.

Exercice6

Soit f une fonction dérivable sur ℝ. Montrer que $\forall x\succ 0, \exists\, c\succ 0,\ f(x)-f(-x)=x(f'(c)+f'(-c))$

Exercice7

Soit *f* la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $f(x)=\dfrac{tanx-x}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$.

1. Montrer que *f* est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
2. Soit pour $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ la fonction *h* définie par : $h(x)=2x-sin\,2x$. Etudier *h* et en déduire que

   $2x-sin\,2x\succ 0$ pour $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. Soit $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et g définie sur $[0,a]$ par : $g(x)=\left(\dfrac{tana-a}{a^2}\right)x^2+x-tanx$.

   a) Montrer qu'il existe un réel $c\in]0,a[$ tel que $\dfrac{tan^2c}{2c}=\dfrac{tana-a}{a^2}$.

   b) En déduire que *f* est dérivable à droite en 0.

   c) Etudier les variations de *f*.

Exercice 8

1. Soit *f* définie par : $f(x)=\dfrac{3\,sinx}{2+cosx}-x$.

   a) Démontrer que le signe de *f'* sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, est le même que le signe de : $-cos^2x+2cosx-1$.

   b) En déduire le sens de variation de *f* sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, puis son signe.
2. Soit g définie par $g(x)=\dfrac{2\,sinx+tanx}{3}-x$.

   a) Démontrer que : $g'(x)=\dfrac{(cosx-1)^2(2cosx+1)}{3}\times\dfrac{1}{cos^2x}$.

   b) En déduire le sens de variation de g sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, puis le signe de g sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
3. Montrer alors que pour tout réel x de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\dfrac{3\,sinx}{2+cosx}\leq x\leq\dfrac{2sinx+tanx}{3}$.
4. En utilisant les valeurs exactes des lignes trigonométriques de $\dfrac{\pi}{6}$ et l'encadrement précédent, déterminer une valeur approchée de $\dfrac{\pi}{6}$ puis de π.

Lycée pilote de Tunis	**Les accroissements finis**	*Terminales Maths & s-ex*
Mr Ben Regaya. A	**Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice1

1. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ donc g est définie et continue en tout réel non nul.
   f étant dérivable sur l'intervalle $]a,b[$ ne contenant pas 0 donc g est dérivable sur $]a,b[$ et $g(a)=\dfrac{f(a)}{a}=0$.
2. Pour x réel de $]a,b[$, $g'(x)=\dfrac{x\,f'(x)-f(x)}{x^2}$.
3. **Enoncé du théorème de Rolle :**
   h une fonction continue sur $[a,b]$, $a\prec b$ et dérivable sur $]a,b[$ avec $h(a)=h(b)$
   alors il existe un réel $c\in\,]a,b[$ tel que $h'(c)=0$.
4. La fonction g satisfait les hypothèses du théorème de Rolle continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $[a,b]$, $a\prec b$ et dérivable sur $]a,b[$ donc il existe réel $t\in\,]a,b[$ tel que $g'(t)=0$.
   Mais $g'(t)=0\Leftrightarrow\dfrac{t\,f'(t)-f(t)}{t^2}=0\Leftrightarrow t\,f'(t)-f(t)=0\Leftrightarrow f'(t)=\dfrac{f(t)}{t}$. t étant non nul.
   Ainsi il existe $t\in\,]a,b[$, $f'(t)=\dfrac{f(t)}{t}$.
5. le coefficient directeur de la droite D_t est $\dfrac{f(t)-0}{t-0}=\dfrac{f(t)}{t}$.
6. On a prouver qu'il existe $t\in\,]a,b[$, $f'(t)=\dfrac{f(t)}{t}$ et ceux-ci veut dire qu'il existe un point de la courbe de f d'abscisse $t\in\,]a,b[$ tel que la tangente en ce point est parallèle à la droite D_t.

Exercice 2

1. a) $x\succ 1$; $\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}\right)}{x-1}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}\right)}{\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}}\times\dfrac{\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}}{x-1}$

   Or $=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}=0$ et $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ donc par composée $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}\right)}{\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}}=1$ de plus

   $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{(x-1)}}=+\infty$ et donc par produit $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=+\infty$. f n'est pas dérivable à droite en 1.

   la demi tangente à (C) au point d'abscisse 1 a pour équation : $\begin{cases}x=1\\ y\geq 0\end{cases}$

   b) la fonction $x\mapsto x-1$ est polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et strictement positive sur $]1,+\infty[$ donc la fonction $x\mapsto\dfrac{\pi}{2}\sqrt{x-1}$ est dérivable sur $]1,+\infty[$ et comme la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors f est dérivable sur $]1,+\infty[$.

c) f est continue sur $[1,+\infty[$ donc sur $[1,2]$ et elle est dérivable sur $]1,+\infty[$ donc sur $]1,2[$ par le théorème de accroissements finis, il existe un réel $c\in]1,2[$ tel que $f'(c)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}=1$ c'est le résultat demandé.

2. a) On a vu que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et donc sur cet intervalle

$$f'(x)=\frac{\frac{\pi}{2}}{2\sqrt{(x-1)}}\times cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}\right)=\frac{\pi}{4}\frac{cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}\right)}{\sqrt{(x-1)}}.$$

b) On a pour tout $x\succ 1$; $-1\le cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}\right)\le 1$ et donc en multipliant par $\dfrac{\pi}{4\sqrt{(x-1)}}\succ 0$ on aura :

$\dfrac{\pi}{4\sqrt{(x-1)}}\succ 0\le\dfrac{\pi}{4\sqrt{(x-1)}}\times cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{(x-1)}\right)\le\dfrac{\pi}{4\sqrt{(x-1)}}$ qu'on peut écrire $|f'(x)|\le\dfrac{\pi}{4\sqrt{(x-1)}}$.

Or $2\le x\le 5\Leftrightarrow 1\le x-1\le 4\Leftrightarrow 1\le\sqrt{x-1}\le 2\Leftrightarrow\frac{1}{2}\le\frac{1}{\sqrt{x-1}}\le 1\Rightarrow\frac{\pi}{4}\times\frac{1}{\sqrt{x-1}}\le\frac{\pi}{4}$.

Ainsi pour tout réel x de l'intervalle $[2,5]$, $|f'(x)|\le\dfrac{\pi}{4}$.

f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et donc sur $[2,5]$ et pour tout réel de $[2,5]$, $|f'(x)|\le\dfrac{\pi}{4}$ donc d'pres le corollaire du théorème des inégalités des accroissements finis pour x réel de l'intervalle $[2,5]$, $|f(x)-f(2)|\le\dfrac{\pi}{4}|x-2|$ et le faite que $f(2)=1$ et que x réel de l'intervalle $[2,5]$ donc $x\ge 2$, on obtient $|f(x)-1|\le\dfrac{\pi}{4}(x-2)$.

Exercice 3

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ somme de deux fonctions dérivables et $f'(x)=1-sinx\ge 0$ f est alors strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f\langle\mathbb{R}\rangle=\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$.

Or pour tout réel x, $-1\le -cosx\le 1\Leftrightarrow x-1\le x-cosx\le x+1\Leftrightarrow x-1\le f(x)\le x+1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=-\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. Ainsi $f\langle\mathbb{R}\rangle=\mathbb{R}$ et par suite l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique x_0.

Vérifier que $f\left(\frac{\pi}{6}\right)\times f\left(\frac{\pi}{4}\right)\prec 0$ et conclure.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\left[x_0,\frac{\pi}{4}\right]$ et par le théorème des accroissements finis il existe $c\in\left]x_0,\frac{\pi}{4}\right[$ telle que : $\dfrac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f(x_0)}{\frac{\pi}{4}-x_0}=f'(c)$ et comme $f(x_0)=0$, on peut dire qu'il existe $c\in\left]x_0,\frac{\pi}{4}\right[$ telle que : $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\left(\frac{\pi}{4}-x_0\right)f'(c)$.

$c\in\left]x_0,\frac{\pi}{4}\right[$ et $x_0\in\left]\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right[$ donc $\frac{\pi}{6}\prec c\prec\frac{\pi}{4}\Leftrightarrow sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\prec sinc\prec sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ car la fonction sinus et strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et donc , on obtient

$1+sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\prec 1+sinc\prec 1+sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\Leftrightarrow 1+\dfrac{1}{2}\prec f'(c)\prec 1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow f'(c)\succ\dfrac{3}{2}$ c'est le résultat demandé.

Déduction :

On a : $\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{f'(c)}=\dfrac{\pi}{4}-x_0$ or $\dfrac{1}{f'(c)}\prec\dfrac{2}{3}\Leftrightarrow\dfrac{f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{f'(c)}\prec\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et par suite $\dfrac{\pi}{4}-x_0\prec\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ soit encore $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\prec x_0$ et on sait déjà que $x_0\prec\dfrac{\pi}{4}$ on obtient donc $\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{2}{3}f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\prec x_0\prec\dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 4

1. Introduisons la fonction h définie par $h(x)=f(x)\big(g(b)-g(a)\big)-g(x)\big(f(b)-f(a)\big)$. h est continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ et $h(a)=f(a)\big(g(b)-g(a)\big)-g(a)\big(f(b)-f(a)\big)=f(a)g(b)-f(b)g(a)$ et $h(b)=f(b)\big(g(b)-g(a)\big)-g(b)\big(f(b)-f(a)\big)=f(a)g(b)-f(b)g(a)$.

   On a donc $h(a)=h(b)$ et par le théorème de Rolle , il existe un réel $c\in\,]a,b[$ tel que $h'(c)=0$, c'est-à-dire $f'(c)\big(g(b)-g(a)\big)=g'(c)\big(f(b)-f(a)\big)$.

2. Pour $x\in[a,b]$, il existe $c\in[a,x]$ tel que $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Mais lorsque x tend vers a, il est clair que c tend vers a aussi et donc $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$. En conclusion, on a bien $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=l$.

Exercice 5

f' est continue sur $[0,1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Soit $m=inf\big(f'(x)\big)$ pour $x\in[0,1]$.

Il existe $x_0\in[0,1]$ tel que $m=f'(x_0)$. En particulier $m\succ 0$ puisque $f'(x_0)\succ 0$. Posons ensuite $g(x)=f(x)-mx$. g est dérivable et de dérivée continue sur $[0,1]$. $g'(x)=f'(x)-m\geq 0$, et donc g est croissante. Puisque $g(0)=0$, $g(x)\geq 0$ pour tout $x\in[0,1]$, c'est-à-dire $f(x)\geq m$.

Exercice6

On pose $g(x)=f(x)-f(-x)$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, $g'(x)=f'(x)+f'(-x)$.

D'après le théorème des accroissements finis : $\forall x\succ 0$, il existe $c\succ 0$ tel que $g(x)-g(0)=(x-0)g'(c)$ ou encore $g(x)=x\big(f'(c)+f'(-c)\big)$.

Exercice 7

1. Pour $x\neq 0$; $f(x)=\dfrac{tanx}{x}-1$. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tanx}{x}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0=f(0)$ et f est continue en 0.

   sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ $x\mapsto\dfrac{tanx}{x}$ est quotient de deux fonctions continues avec un dénominateur qui ne s'annule pas sur cet intervalle donc f est continue sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et par suite elle est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2. $h(x)=2x-\sin 2x$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

h est dérivable sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ (Somme de deux fonctions dérivables) et $h'(x)=2-2\cos 2x=2(1-\cos x)\geq 0$

h est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

$h\left(\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)=\left]h(0),h\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right[=]0,\pi[$ donc $h(x)\succ 0,\ \forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$. Ainsi $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$; $2x-\sin 2x\succ 0$

3. a) $g(x)=\left(\dfrac{\tan a-a}{a^2}\right)x^2+x-\tan x$. $x\in[0,a]$ et $a\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

- g est continue sur $[0,a]$ pour tout réel a de $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.
- g est dérivable sur $]0,a[$
- $g(0)=0=g(a)$

D'après le théorème de Rolle , il existe $c\in]0,a[$ tel que $g'(c)=\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=0$

Or $g'(x)=2x\left(\dfrac{\tan a-a}{a^2}\right)+1-1-\tan^2x=2x\left(\dfrac{\tan a-a}{a^2}\right)-\tan^2x$

$g'(c)=0\Leftrightarrow 2c\left(\dfrac{\tan a-a}{a^2}\right)-\tan^2c=0\Leftrightarrow\dfrac{\tan^2c}{2c}=\dfrac{\tan a-a}{a^2}$.

b) Pour $x\succ 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\dfrac{\tan x-x}{x^2}$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan x-x}{x^2}=\lim\limits_{c\to 0^+}\dfrac{\tan^2c}{2c}=\lim\limits_{c\to 0^+}\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\tan c}{c}\times\tan c=0$. ($c\in]0,x[$ donc quand x tend vers 0, c tend aussi vers 0) .

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0)=0$

c) f est dérivable sur $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et pour $x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

$$f'(x)=\frac{x\tan^2x-\tan x+x}{x^2}=\frac{\dfrac{x\sin^2x-\sin x\cos x+x\cos^2x}{\cos^2x}}{x^2}$$

$f'(x)=\dfrac{x\tan^2x-\tan x+x}{x^2}=\dfrac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2x}=\dfrac{2x-\sin 2x}{2x^2\cos^2x}=\dfrac{h(x)}{2x^2\cos^2x}\succ 0$. Ainsi f est strictement croissante sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ et $f\left\langle\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right\rangle=[0,+\infty[$.