Lycée pilote de Tunis	**Evaluation 1**	**Terminales Maths 4**
Mrs Ben Regaya. A	**Eléments de corrections**	www.ben-regaya.net

Exercice 1

Il suffit de couper en passant par $f\left(x_0\right)$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left(\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}+\frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}\right)$$ et donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}=\frac{f'(x_0)+f'(x_0)}{2}=f'(x_0).$$

La réciproque est fausse. Il suffit de choisir $f(x)=|x|$ et $x_0=0$.

Exercice 2

1. a) On a : $\begin{cases} OA=OB=\sqrt{2} \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} OA=OB \\ \left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$. D'où l'existence et l'unicité d'une rotation *R* de centre *O* et d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme *A* en *B*.

   b) $M'=R(M)\Leftrightarrow z'-z_O=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z-z_O\right)$ d'où l'écriture de la transformation complexe associé à R est $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z$.

2. a) La translation a pour écriture complexe $z'=z+1-\sqrt{2}+i$.

   Alors φ a pour écriture complexe : $z'=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(z+1-\sqrt{2}+i\right)$.

   Posons $O'=\varphi(O)$ donc $z_{O'}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(1-\sqrt{2}+i\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(1-\sqrt{2}+i\right)=-1+i\left(\sqrt{2}-1\right)$

   Posons $A'=\varphi(A)$ donc $z_{A'}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+i\right)=i\sqrt{2}$

   Posons $B'=\varphi(B)$ donc $z_{B'}=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(1+i+1-\sqrt{2}+i\right)=e^{i\frac{\pi}{4}}\left(2-\sqrt{2}+2i\right)=-1+i\left(2\sqrt{2}-1\right)$.

   b) φ est la composée de deux déplacements d'angles respectifs 0 et $\frac{\pi}{4}$ donc c'est un déplacement d'angle la somme $\frac{\pi}{4}$ ainsi φ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$.

   c) φ^n est une symétrie centrale si et seulement si $n\frac{\pi}{4}=\pi+2k\pi, k$ entier , si et seulement si $n=4+8k$ avec k entier naturel.

Exercice 3

1. a) Figure

   b) *ABCD* losange donc $BC=BA$ et $B\neq C$ donc il existe un unique déplacement *f* qui transforme *C* en *B* et *B* en *A*.

   c) $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)+\pi[2\pi]\Rightarrow\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{BA}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors *f* est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

   On a : $\begin{cases} \left(\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DA}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi] \\ DA=DB \end{cases}$ donc *D* est le centre de *f*.

   En définitif : $f=R_{\left(D,-\frac{\pi}{3}\right)}$.

2. $f_1 = R_{\left(D,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ S_{\Delta_1}$

$\begin{cases} f_1(D) = D \\ f_1(A) = A \end{cases}$ f_1 est un antidéplacement qui fixe les points distincts A et D alors $f_1 = S_{(AD)}$.

$f_2 = f \circ t_{\overrightarrow{BC}} = R_{\left(D,-\frac{\pi}{3}\right)} \circ t_{\overrightarrow{BC}}$

f_2 est la composée de deux déplacements donc c'est déplacement d'angle $-\frac{\pi}{3}$. f_2 est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Comme $f_2(B) = B$ alors $f_2 = R_{\left(B,-\frac{\pi}{3}\right)}$.

3. a) g l'isométrie telle que $g = f_2 \circ f_1$.

$g(A) = (f_2 \circ f_1)(A) = f_2(A) = D$ et $g(K) = (f_2 \circ f_1)(K) = f_2(K) = J$.

Ainsi $g(A) = D$ et $g(K) = J$.

b) Les segments $[AD]$ et $[KJ]$ n'ont pas la même médiatrice donc g est une symétrie glissante.

Désignons par Δ et $\vec{u}$ l'axe et le vecteur de g.

$g(A) = D$ donc le milieu K de $[AD]$ appartient à Δ et comme $J = g(K) = t_{\vec{u}}(K) \Rightarrow \vec{u} = \overrightarrow{KJ}$.

Finalement $g = t_{\overrightarrow{KJ}} \circ S_{(KJ)} = S_{(KJ)} \circ t_{\overrightarrow{KJ}}$.

4. a) Montrons que φ est sans points invariants.

Supposons que $\varphi = S_d$.

Comme $\varphi(J) = B$ alors d est la médiatrice de $[JB]$ qui est la droite (KJ).

Alors $\varphi\langle\Delta_1\rangle = S_d\langle\Delta_1\rangle = \Delta_1$ car $\Delta_1 \perp (KJ)$. Ceci est absurde.

Alors φ est un antidéplacement sans points invariants.

b) $(CD) \perp \Delta_2$ et J est un point de (CD) donc $\varphi\langle(CD)\rangle$ est la perpendiculaire à Δ_1 passant par B donc $\varphi\langle(CD)\rangle = (AB)$.

C est le point d'intersection de (CD) et Δ_2 donc son image par φ est le point d'intersection des droites (AB) et Δ_1 c'est le point I.

Ainsi $\varphi(C) = I$.

c) $S_G \circ \varphi$ est un antidéplacement $\begin{cases} S_G \circ \varphi(C) = C \\ S_G \circ \varphi(J) = J \end{cases}$. Alors $S_G \circ \varphi = S_{(CJ)}$.

d) On a : $S_G \circ \varphi = S_{(CJ)}$ donc $\varphi = S_G \circ S_{(CJ)} = S_{(GJ)} \circ S_{(GK)} \circ S_{(CJ)} = S_{(GJ)} \circ t_{\overrightarrow{JB}} = S_{(JB)} \circ t_{\overrightarrow{JB}}$.

φ est une symétrie glissante d'axe (JB) et de vecteur $\overrightarrow{JB}$.

Exercice 4

Partie A.

1. a) La fonction $x \mapsto 1 - x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et elle est strictement positive sur $]-1,1[$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{1-x^2}$ est dérivable sur $]-1,1[$ et ne s'annule pas sur cet intervalle.

Ainsi f est dérivable sur $]-1,1[$ et on a : $f(x) = -\dfrac{\sqrt{1-x^2} - x\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}}{\left(1-x^2\right)} = \dfrac{1}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}} \succ 0$.

f est strictement croissante sur $]-1,1[$

$\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)=-\infty, \quad \lim\limits_{x\to(1)^-} f(x)=+\infty$

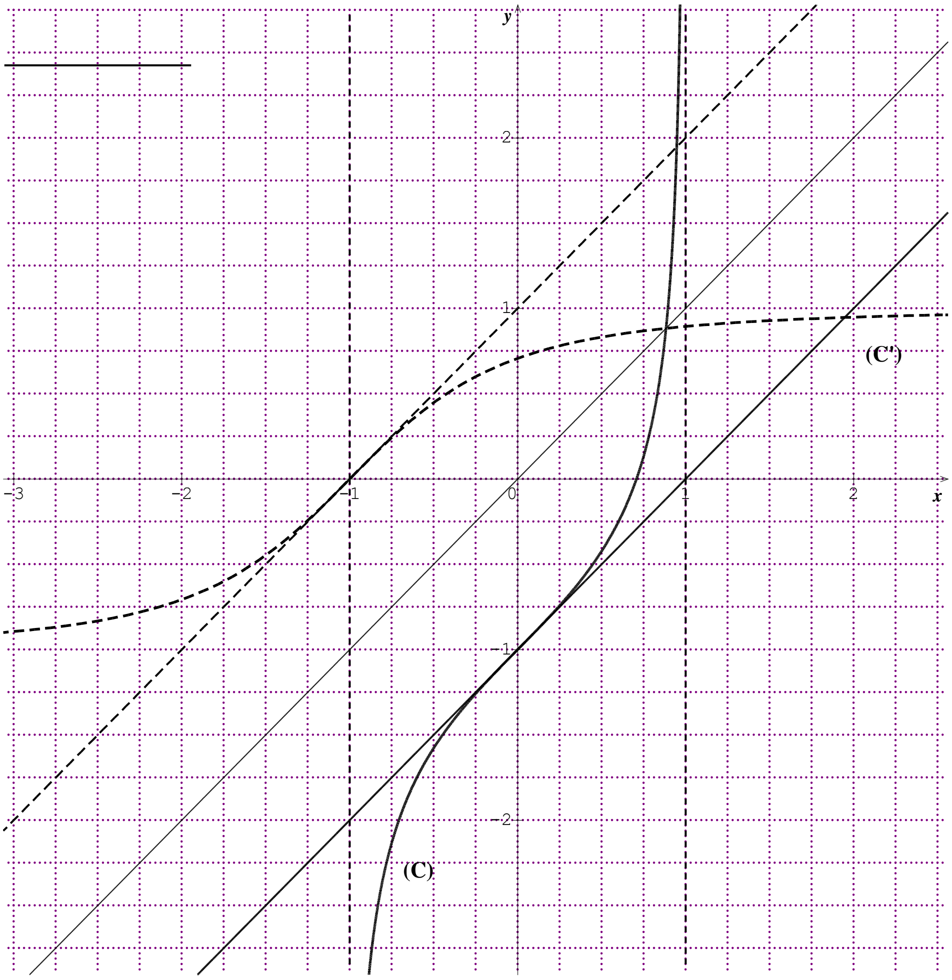
b) une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse nulle est donnée par : $y=f'(0)x+f(0)=x-1$.

Etudions le signe de $f(x)-(x-1)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}-x=x\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}-1\right)=x\left(\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}}\right)$

$=x\left(\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}\right)=\dfrac{x^3}{\sqrt{1-x^2}\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}$. Le signe de $f(x)-(x-1)$ sur $]-1,1[$ est celui de x^3.

Donc sur $[0,1[$ la courbe (C) est au dessus de T et sur $]-1,0]$ la courbe (C) est en dessous de T.

d)



2. a) f est dérivable sur $]-1,1[$ donc continue sur cet intervalle et elle est strictement croissante donc elle réalise une bijection de cet intervalle sur $f\langle]-1,1[\rangle =]-\infty,+\infty[$.

b) voir plus haut.

c) on a : $\begin{cases} x=f(y) \\ y\in]-1,1[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Or $x=f(y)\Leftrightarrow x=-1+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)^2=\dfrac{y^2}{1-y^2} \\ y(x+1)\succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{(x+1)^2}{1+(x+1)^2} \\ y(x+1)\succ 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$, x réel.

Ainsi pour tout réel x, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{1+(x+1)^2}}$.

Partie B.

1. a) h la fonction définie sur $]-1,1[$ par $h(x)=f\left(-sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)$.

$$h(x)=-1+\dfrac{-sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{\sqrt{1-\left(sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)^2}}=-1-\dfrac{sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{\sqrt{\left(cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)^2}}=-1-\dfrac{sin\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)}{\left|cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right|}$$ et $cos\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\succ 0$ car

$\dfrac{\pi}{2}x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$

Ainsi $h(x)=-1-tan\left(\dfrac{\pi}{2}x\right), x\in\,]-1,1[$.

b) h est dérivable sur $]-1,1[$ et $h'(x)=-\dfrac{\pi}{2}\left(1+tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}x\right)\right)\prec 0$, h est donc strictement décroissante sur $]-1,1[$ ainsi h réalise une bijection de $]-1,1[$ sur $h\langle]-1,1[\rangle=\mathbb{R}$ (vu que h est continue sur $]-1,1[$).

h admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}$.

c) h est dérivable sur $]-1,1[$ et la fonction dérivée h' ne s'annule pas sur cet intervalle alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $g'(x)=\dfrac{1}{h'(y)}$ avec $x=h(y), y\in\,]-1,1[$

et donc $g'(x)=-\dfrac{2}{\pi\left(1+tan^2\left(\dfrac{\pi}{2}y\right)\right)}=-\dfrac{2}{\pi\left(1+(x+1)^2\right)}, x\in\mathbb{R}$.

2. a) la fonction $x\mapsto x-1$ est polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$ et celle qui a $x\mapsto\dfrac{1}{x}-1$ est rationnelle dérivable en tout réel non nul.

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc φ est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ et

$$\varphi'(x)=g'(x-1)-\dfrac{1}{x^2}g'\left(\dfrac{1}{x}-1\right)=\dfrac{-2}{\pi\left(x^2+1\right)}-\dfrac{1}{x^2}\dfrac{-2}{\pi\left(\left(\dfrac{1}{x}\right)^2+1\right)}=0.$$

b) On a $h\left(\dfrac{1}{2}\right)=-2\Leftrightarrow g(-2)=\dfrac{1}{2}$ et $h\left(-\dfrac{1}{2}\right)=0\Leftrightarrow g(0)=-\dfrac{1}{2}$.

La fonction φ' est nulle sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ donc $\varphi(1)=2g(0)=-1$ et $\varphi(-1)=2g(-2)=1$.

Déduction :

φ est dérivable sur $]-\infty,0[$

φ' est nulle sur $]-\infty,0[$

Donc φ est constante sur cet intervalle et comme $\varphi(-1)=1$ alors $\varphi(x)=1,\ x\prec 0$.

De même $\varphi(x)=-1,\ x\succ 0$.

3. a) k naturel non nul ; $1+\dfrac{1}{k}\succ 1$ et $\varphi(x)=-1,\ x\succ 0$ donc $\varphi\left(1+\dfrac{1}{k}\right)=-1$.

b) $\varphi\left(1+\frac{1}{k}\right)=-1 \Leftrightarrow g\left(1+\frac{1}{k}-1\right)+g\left(\frac{1}{1+\frac{1}{k}}-1\right)=-1 \Leftrightarrow g\left(\frac{1}{k}\right)+g\left(\frac{-1}{1+k}\right)=-1$, k naturel non nul.

c) On a : $g\left(\frac{1}{k}\right)+g\left(\frac{-1}{k+1}\right)=-1$ et donc $\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{-1}{k+1}\right)=-n \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} g\left(\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=2}^{n+1} g\left(\frac{-1}{k}\right)=-n$

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n}\left(g\left(\frac{1}{k}\right)+g\left(\frac{-1}{k}\right)\right)-g(-1)+g\left(\frac{-1}{n+1}\right)=-n$, on voit donc que $v_n=-n-g\left(\frac{-1}{n+1}\right)$.

$w_n=-1-\frac{1}{n} g\left(\frac{-1}{n+1}\right)$

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{n+1}=0$ et g est continue en 0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g\left(\frac{-1}{n+1}\right)=g(0)=-\frac{1}{2}$ et par suite $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n=-1$.

Exercice5

1. a) f est dérivable sur $[1,+\infty[$ donc sur $[n,n+1]$, n naturel non nul.

$n\le x\le n+1 \Leftrightarrow f'(n)\le f'(x)\le f'(n+1)$ et donc par le théorème des inégalités des accroissements finies

$f'(n)\le f(n+1)-f(n)\le f'(n+1)$.

b) Déduction :

$p=1$; $0\le 0\le 0$ c'est bon.

$p\ge 2$, $f'(n)\le f(n+1)-f(n)\le f'(n+1)$ donc par somme on obtient :

$\sum_{n=1}^{p-1} f'(n)\le \sum_{n=1}^{p-1}\left(f(n+1)-f(n)\right)\le \sum_{n=1}^{p-1} f'(n+1)$ et donc $u_p-f'(p)\le f(p)-f(1)\le u_p-f'(1)$ c'est le résultat demandé.

2. a) $u_p=\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{-2}{n^3}\right)$

$u_{p+1}-u_p=\sum_{n=1}^{p+1}\left(\frac{-2}{n^3}\right)-\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{-2}{n^3}\right)=\frac{-2}{(p+1)^3}\prec 0$ et donc (u_p) est décroissante.

b) On a : $u_p-f'(p)\le f(p)-f(1)\le u_p-f'(1) \Leftrightarrow -f'(p)\le -u_p+f(p)-f(1)\le -f'(1)$

$\Leftrightarrow -f'(p)-f(p)+f(1)\le -u_p\le -f'(1)-f(p)+f(1)$ et donc $u_p\ge f'(1)+f(p)-f(1)$ ou encore

$u_p\ge -2+\frac{1}{p^2}-1$ et finalement $u_p\ge -3$ car $\frac{1}{p^2}\succ 0$ la suite (u_p) est minorée par -3.

La suite (u_p) est décroissante et elle est minorée par -3 donc converge.

De l'égalité $u_p=\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{-2}{n^3}\right)=-2\sum_{n=1}^{p}\left(\frac{1}{n^3}\right)$ on en déduit que $v_p=-\frac{1}{2}u_p$ et donc (v_p) converge vers un réel l.

Mais on a : $f(p)-3\le u_p\le f'(p)+f(p)-f(1)$ ou encore $\frac{1}{p^2}-3\le u_p\le -\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}-1$

$\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{1}{p^2}-3\right)=-3$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(-\frac{2}{p^3}+\frac{1}{p^2}-1\right)=-1$ alors par les théorème de comparaison

$-3\le \lim\limits_{p\to+\infty}(u_p)\le -1$ et comme $v_p=-\frac{1}{2}u_p$ alors $\frac{1}{2}\le l\le \frac{3}{2}$.