Exercice n°2 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (L'unité graphique étant 8 cm).

On considère les points A et B d'affixes respectives (-1) et 1 .

Soit z un nombre complexe différent de 0, 1 et (-1). On note M, N et P les points d'affixes respectives z , z^2 et z^3

1- Justifier que les points M, N et P sont deux à deux distincts.

2- Dans cette question, on prend : $z = -\frac{1}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$.

a- Donner l'écriture exponentielle de chacun des nombres complexes z, z^2 et z^3.

b- Construire dans un repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les points M, N et P.

c- Donner l'écriture algébrique de $\frac{z_P - z_N}{z_P - z_M}$.

d- En déduire la nature du triangle MNP.

3- Soit E l'ensemble des points M du plan telque MNP soit un triangle rectangle en P.

a- Montrer que $MP^2 + NP^2 = MN^2$ si et seulement si $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.

b- Montrer alors que MNP est un triangle rectangle en P si et seulement si $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

c- Déterminer alors et construire l'ensemble E.

4- On pose $z = re^{i\theta}$ où $\theta \in]-\pi, \pi]$ et r un réel strictement positif.

a- Déterminer les valeurs de θ pour lesquelles P appartient à la demi-droite $[OB)$.

b- Déterminer les affixes des points M tels que le triangle MNP soit rectangle en P et que P appartienne à la demi-droite $[OB)$.

Exercice n°2 : *(5 points)*

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $iz^2 + (2\sin\theta)z - 2i(1+\cos\theta) = 0$ avec $\theta \in]-\pi, \pi]$.

1-a- Vérifier que : $\sin^2\theta - 2(1+\cos\theta) = [i(1+\cos\theta)]^2$.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .

2- Soient M' et M" les points de du plan d'affixes respectives : $z' = 1+\cos\theta + i\sin\theta$ et $z'' = -1-\cos\theta+i\sin\theta$.

a- Ecrire sous forme exponentielle z' et z''.

b- Déterminer et construire l'ensemble ζ_1 des points M' et en déduire l'ensemble des points M" .

3- Montrer que pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$: $\frac{z'}{z''} = e^{i(\theta-\pi)}$ et en déduire les valeurs de θ pour lesquelles OM'M" est un triangle équilatéral.

4- Pour $\theta = \frac{2\pi}{3}$, résoudre l'équation : $iz^6 + (2\sin\theta)z^3 - 2i(1+\cos\theta) = 0$

Soit f la fonction définie sur IR par $\begin{cases} f(x)=x^2\sin\left(\dfrac{\pi}{x}\right)+1 & \text{si } x\in\left]-\infty,0\right[\\ f(x)=\dfrac{2-\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} & \text{si } x\in\left[0,+\infty\right[\end{cases}$

1-a- Montrer que pour tout $x\in\left]-\infty,0\right[$: $-x^2+1\le f(x)\le x^2+1$.

b- En déduire que f est continue en zéro.

2-a- Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

b- Calculer la limite de f en $(+\infty)$ et interpréter graphiquement le résultat.

3- Soit g la fonction définie sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ par : $g(x)=f(\tan x)$

a- Montrer que la fonction g est continue sur $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[$.

b- Calculer la limite de g à gauche en $\dfrac{\pi}{2}$.

EXERCICE N° 1 : (8 points)

Soit $\theta\in\left]-\pi,\pi\right[$, on considère l'application f_θ qui à tout nombre complexe z de $\mathbb{C}\setminus\{e^{i\theta}\}$

associe le nombre complexe $f_\theta(z)=\dfrac{1+e^{i\theta}z}{e^{i\theta}-z}$

I-1- Vérifier que si $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta=-\dfrac{\pi}{2}$, alors l'application f_θ est constante.

2- On pose $\theta=0$.

a- Montrer que pour tout nombre complexes z et z' de $\mathbb{C}\setminus\{-1,1\}$: $f_0(z)=z' \Leftrightarrow z=-f_0(-z')$

b- Soit α un réel différent de $2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$, montrer que : $f_0(e^{i\alpha})=i\cot\text{an}\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

c- Déterminer les racines carrées du nombre complexe $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$.

d- En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation : $(1+z)^2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)(1-z)^2$.

II-On suppose que $\theta\in\left]-\pi,\pi\right[\setminus\left\{-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

1-a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2-2iz\sin\theta-1=0$.

b- Vérifier que i est une solution de l'équation (E) : $z^3-i(1+2\sin\theta)z^2-(1+2\sin\theta)z+i=0$.

c- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B, M et M' les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$, $-e^{-i\theta}$, z et $z'=f_\theta(z)$.

a- Montrer que pour tout point M distinct de A et B on a : $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\pi+\theta+\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)[2\pi]$.

b- Pour $\theta=\dfrac{\pi}{4}$, déterminer et construire l'ensemble des points M lorsque M' décrit la demi-droite Δ d'équation : $x>0$ et $y=-x$.

2020 - 2021	Equations à coefficients complexes	M^r: Belhadj Zied

Exercice n°1:

1- soit, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3+(1-2i)z^2-(1+6i)z-5=0$.

a- montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera.

b- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E).

2- Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$ on donne les points A, B et C d'affixes respectives i, -2-i et 1+2i, montrer que A,B et C sont alignés.

3- Soit $P\setminus\{A\}\to P : M(z)\mapsto M'(z')$ telle que $z'=\dfrac{5i-z}{z-i}$.

Vérifier que $z'+1=\dfrac{4i}{z-i}$ et déterminer l'ensemble des points M' lorsque M décrit le cercle c(A,4).

4- a- Soit le point E (5i), montrer que $\left(\vec{u},\widehat{\overrightarrow{OM'}}\right)=\pi+\left(\overrightarrow{MA},\widehat{\overrightarrow{ME}}\right)[2\pi]$.

b- En déduire l'ensemble des points M lorsque z' est un nombre imaginaire pur.

5- Soit $\theta\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose $z=e^{i\theta}$:

a- Montrer que $z-i=2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}$.

b- En déduire la forme exponentielle de $z'+1$ et déterminer θ pour que $|z'+1|=2\sqrt{2}$.

Exercice n°2 :

Soit dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^3+\alpha z^2-\bar{\alpha}z-1=0$.

1- Vérifier que si z_0 est une solution de (E) alors $\dfrac{1}{\bar{z}_0}$ est aussi une solution de (E).

2- On pose $\alpha=e^{i\theta}$ avec θ un réel.

a- Vérifier que $-\alpha$ est une solution de (E).

b- Résoudre alors l'équation (E).

3- En déduire les solutions de l'équation (E') : $2z^3+\left(1+i\sqrt{3}\right)z^2-\left(1-i\sqrt{3}\right)z-2=0$.

Exercice n°3:

Soit l'application $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, $z\longrightarrow z^4-3z^3+\dfrac{9}{2}z^2-3z+1$

1-a- Comparer $f(\bar{z}_0)$ et $\overline{f(z_0)}$, En déduire que si z_0 est une solution de l'équation (E) : $f(z)=0$ alors $\bar{z}_0$ est aussi solution de cette équation .

b- Exprimer $f\left(\dfrac{1}{z_0}\right)$ en fonction de $f(z_0)$ pour tout z_0 de $\mathbb{C}^*$. Conclure.

c- Calculer f(1 + i). En déduire les solutions de l'équation (E)

2- Utiliser la factorisation de f(z) dans $\mathbb{C}$ pour déduire une factorisation dans IR de la restriction g de f à IR en deux facteurs du second degré .

Exercice n°4:

1- Dans l'ensemble C des nombres complexes, on considère l'équation (E_m) : $\bar{m}z^3-3mz-m^2=0$; où m est nombre complexe donné de module 2.

Vérifier que m est une solution dans C de l'équation (E_m) puis résoudre dans C l'équation (E_m).

2- En déduire les solutions dans C de l'équation (E') $(1-i\sqrt{3})z^6-3(1+i\sqrt{3})z^2+2(1-i\sqrt{3})=0$

On donnera les solutions sous forme exponentielle.

Exercice n°5:

1- Soit (E) : $z^3-2(1+i)z^2+2(2i+1)z-4i=0, \quad z\in\mathbb{C}$.

Vérifier que 2i est une solution de (E) et résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation .

2- Soit (E') : $z^2-2z+1-e^{i2\theta}=0$ où $\theta\in]0,\pi[$.

a- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') on notera z_1, la solution tel que $im(z_1)>0, z_2$, l'autre solution.

b- Vérifier que $z_1=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et $z_2=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$

3- Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On donne $M_1(1+e^{i\theta})$, $M_2(1-e^{i\theta})$ et $A(2)$

a- Montrer que OM_1AM_2 est un parallélogramme.

b- Déterminer θ pour que OM_1AM_2 soit un losange.

4- Soit $f:P\setminus\{B\}\to P:M(z)\to M'(z')$ tel que $z'=\frac{1+z}{1-z}$ avec B le point d'affixe 1.

a- Montrer que fadmet deux points invariants à préciser

b- Déterminer l'ensemble des points M(z) pour que z' soit imaginaire pur

c- Montrer que si $z'=e^{i\theta}$ alors $z=i\cot an\frac{\theta}{2}$, avec $\theta\in]0,\pi[$.

d- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+z)^4=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-z)^4$

Exercice n°6:

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$. On considère le point A d'affixe 1 et l'application $f: P\longrightarrow P$; $M(z)\mapsto M'(z')$ tel que $z'=2z-z^2$

1- Déterminer les points invariants par f.

2- On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z^2 et $2z$.

a- Déterminer l'ensemble des points M(z) tels que les points O, M_1 et M_2 soient alignés.

b- On suppose que M n'appartient pas à l'axe des abscisses. Montrer que OM_1M_2M' est un parallélogramme.

3- On suppose que M appartient au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

a- Montrer que AM = MM' et que $\frac{z'-1}{z}$ est réel.

b- En déduire que A et M' sont symétriques par rapport à la tangente Δ à Γ en M.

4-a- Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) $2z-z^2=1+e^{i2\theta}$ où $\theta\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

(On notera z_1 et z_2 les solutions de (E) tel que $Im(z_1)>0$).

b- Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

c- Montrer que $N_1(z_1)$ et $N_2(z_2)$ sont symétriques par rapport à un point fixe à préciser.

d- Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points N_1 lorsque θ décrit $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. En déduire l'ensemble E_2 des points N_2 lorsque θ décrit $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.