

**Exercice 1 :5points**

On définit la suite  $u = (u_n)_{n \geq 0}$

par :  $u_0 = 1$  et, pour  $n \geq 0$   $u_{n+1} = 2u_n + \frac{1}{u_n}$ ,

- 1) a) Montrer que pour tout  $n$  on a :  $u_n > 0$  .  
b) Etudier la monotonie de cette suite.

c) Dédire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

- 2) On pose, pour  $n \geq 0$  ,  $v_n = \frac{u_n}{2^n}$

a) Montrer qu'on a ;  $0 < v_{n+1} - v_n \leq \frac{1}{2^{n+1}}$

b) En déduire que la suite  $v = (v_n)_{n \geq 0}$  est majorée par 2,

c) Dédire alors que la suite  $v$  est convergente.

**Exercice 2:**

On considère la suite  $u$  définie par :

$$u_0 = \frac{3}{4} \text{ et } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{1}{2}u_n$$

- 1) a / Montrer que pour tout  $n$ ,  $0 < u_n < 1$   
b / Montrer que  $u$  est convergente et calculer sa limite .

- 2) a / Montrer que tout  $n$  :  $u_{n+1} \leq \frac{7}{8} u_n$

b) Dédire que pour tout  $n$  :  $0 < u_n < \frac{3}{4} \left(\frac{7}{8}\right)^n$

c) Retrouver alors  $\lim u_n$ .

**Exercice 3:**

Démontrer chaque réponse si elle est vraie

- 1) On considère  $(u_n)$  positive et la suite  $(v_n)$  définie par

$$v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

- a) Pour tout  $n \geq 0$  on a  $v_n \leq 1$ .  
b) Si  $(u_n)$  est convergente, alors  $(v_n)$  est convergente.  
c) Si  $(v_n)$  est convergente, alors  $(u_n)$  est convergente.  
d) Si  $(u_n)$  est croissante, alors  $(v_n)$  est croissante.

- 2) Soit  $u$  la suite réelle définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + \sqrt{1+u_n}$$

a) La suite  $u$  est convergente.

b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

c) On ne peut pas conclure.

- 3) Etant donné une suite  $(x_n)$ , de nombres réels, définie pour tout entier naturel  $n$ , on considère

la suite  $(S_n)$  définie par  $S_n = \sum_{k=0}^n x_k$

a) Si la suite  $(x_n)$  est convergente, alors la suite  $(S_n)$  l'est aussi.

b) Si les suites  $(x_n)$  et  $(S_n)$  ont le même sens de variation.

- 4) Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  définies pour tout entier  $n > 0$

par :  $u_n = 1 - \frac{1}{n}$  et  $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$  sont adjacentes

- 5) La suite  $u$  ;  $u_n = n + (-1)^n$  tend vers  $+\infty$ .

- 6) Soient  $(u_n)_{n \geq 0}$  et  $(v_n)_{n \geq 0}$  deux suites telles que

$$\begin{cases} 0 \leq u_n \leq 1 \\ 0 \leq v_n \leq 1 \end{cases} \text{ alors } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = 1$$

convergentes.

- 7) La suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $u_n = \frac{n+(-1)^n \sqrt{n}}{2n+3}$  est convergente.

8)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = +\infty$

- 9)  $(u_n)$  étant une suite définie sur  $\mathbb{N}$ .

a)  $(u_n)$  est convergente si et seulement si  $(u_n)^2$  est convergente.

b) Si  $\lim (u_n) = -\infty$  alors la suite  $(u_n)$  est majorée à partir d'un certain rang.

**Exercice 4 :**

- 1) Soit  $x$  un réel positif, montrer que pour tout entier naturel  $n$  on a :  $(1+x)^n \geq 1+nx$ .

- 2) Soit  $U$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $U_n = \frac{n!}{n^n}$ .

a) Montrer que :  $\frac{U_n}{U_{n+1}} \geq 2$

b) Montrer alors que la suite  $U$  est convergente.

c) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  ;  $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$  .

d) Calculer alors la limite de  $U$ .

**Exercice 5 :** (6 points)

On considère la suite  $u$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4-u_n^2}} \end{cases}$$

- 1) a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  on a :

$$0 \leq u_n \leq \sqrt{2}$$

b) Etudier la monotonie de cette suite.

c) En déduire que la suite  $u$  est convergente et donner sa limite.

- 2) Soit  $v$  la suite définie sur  $\mathbb{N}$  par :  $v_n = \frac{u_n^2}{2-u_n^2}$

a) Montrer que  $v$  est suite arithmétique de raison 1.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ , retrouver  $\lim u_n$

- 3) Pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$ , on pose :  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+\sqrt{v_k}}$

a) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}^*$  on a :

$$\frac{n}{n+\sqrt{n+1}} \leq S_n \leq \frac{n}{n+\sqrt{2}}$$

b) Déterminer alors  $\lim S_n$ .

**Exercice 6:**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et } u_{n+1} = 1 + u_n + \frac{1}{1+u_n}$$

- 1/ a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $u_n > 0$ .
- b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- c) Montrer que  $\lim u_n = +\infty$
- 2/ a) Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $1 + u_n < u_{n+1}$ .
- b) Montrer que  $n + \frac{1}{2} \leq u_n$ ;  $n \in \mathbb{N}$
- c) Retrouver alors que  $\lim u_n = +\infty$

**Exercice 7:**

I/ Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par  $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$

- 1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
  - 2) Dédire la monotonie de  $f$  sur  $[1, +\infty[$
- II/ Soit la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$

- 1°) Démontrer que  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a :  $1 \leq u_n$
- 2°) On considère les suites  $(v_n)$  et  $(w_n)$  telles que :  
 $v_n = u_{2n}$  et  $w_n = u_{2n+1}$ .
- a) Vérifier que  $v_{n+1} = f(v_n)$  et que  $w_n = f(v_n)$
- b) Dédire que les suites  $v$  et  $w$  sont monotones.
- 3) a) Montrer que  $v_n \leq 2 \leq w_n$  et que  $3 \leq v_n w_n$
- b) Montrer que pour tout  $n$  on a :

$$0 < w_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{2}{3}(w_n - v_n)$$

- c) Dédire que les deux suites  $v$  et  $w$  sont adjacentes.
- 4°) Montrer alors que la suite  $(u_n)$  est convergente vers une limite que l'on précisera.

**Exercice 8:**

Soit  $s$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$

- 1) a) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ;  $s_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}$
- b) La suite  $s$  est-elle convergente ?
- 2) Vérifier que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  
 $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$
- 3) On considère les suites  $u$  et  $v$  définies sur  $\mathbb{N}^*$  par :  
 $u_n = 2\sqrt{n} - s_n$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{\sqrt{n}}$
- a) Démontrer que les suites  $u$  et  $v$  sont adjacentes.  
 Que peut-on en déduire ?
- b) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{s_n}{2\sqrt{n}}$

**Exercice 9 : (6 points)**

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions continues sur  $[0, 1]$  à valeurs dans  $[0, 1]$  et telles que pour tout  $x$  de  $[0, 1]$ ,  $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ .  
 On se propose de montrer qu'il existe un réel  $c$  de  $[0, 1]$  tel que  $f(c) = g(c)$ .

- 1) Soit  $h$  la fonction définie par :  $h(x) = f(x) - x$ .

a) Montrer que  $h$  s'annule en au moins un réel  $a$  de  $[0, 1]$ .

b) Montrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 1$   $g^n(a) = f[g^n(a)]$  où  $g^n = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_n$ .

2) Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par :  $u_n = g^n(a)$ .

a) Vérifier que  $f(u_n) = u_n$  et que  $g(u_n) = u_{n+1}$ .

b) On suppose que la suite  $(u_n)$  est monotone.

Montrer alors qu'elle est convergente vers un réel  $\ell$ .

Que peut-on dire de  $f(\ell)$  et  $g(\ell)$  ?

c) On suppose que la suite  $(u_n)$  n'est pas monotone.

Montrer qu'il existe deux réels  $p$  et  $q$  tels que le produit

$(f - g)(p) \times (f - g)(q)$  soit négatif.

3) Conclure

**Exercice 10: (6 points)**

Soit  $x$  un nombre réel positif ou nul et  $k$  un entier strictement supérieur à  $x$ .

1) a) Montrer par récurrence sur  $n$  que pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à  $k$  ;

$$\frac{k^n}{n!} \leq \frac{k^k}{k!}$$

b) En déduire que pour tout  $n$  supérieur ou égal à

$$k; \frac{x^n}{n!} \leq \left(\frac{x}{k}\right)^n \cdot \frac{k^k}{k!}$$

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

2) a) Montrer que pour tout  $n$  supérieur ou égal à 2,  $\frac{n^{n-1}}{n!} \geq 1$

b) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{n!}$

**Exercice 11 (4 points)**

On considère, pour chaque entier  $n > 1$ , la fonction

$f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^+$  par :

$$f_n(x) = x^{n+1} + x^n + x^2 + x - 1.$$

Soit  $\mathcal{C}_n$  sa courbe représentative.

1) a) Montrer que la fonction  $f_n$  est strictement croissante

b) Étudier la position relative de  $\mathcal{C}_n$  et  $\mathcal{C}_{n+1}$

2) a) Montrer que  $f_n(x) = 0$  possède une seule solution que l'on notera  $u_n$ .

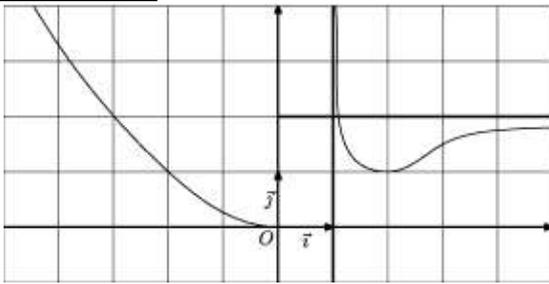
b) Montrer que pour tout  $n > 1$ ,  $0 < u_n < \frac{2}{3}$

c) Montrer que  $(u_n)$  est convergente converge.

3) a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1}^{n+1} = 0$

b) Calculer alors la limite de la suite  $(u_n)$ .

**Exercice 12:**



Soient

$g : [0,1] \rightarrow [0,1]$  une application continue et strictement décroissante.

$f$  : la fonction dont la représentation graphique est donnée ci-dessus.

**I/** 1) Déterminer le domaine de définition de la fonction  $g \circ f$ .

2) Dresser le tableau de variations de  $g \circ f$  sur  $[-2, 0]$ .

3) Calculer les limites éventuelles suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( f(x) - \frac{2x}{x+1} \right), ; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} g \circ f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f\left(\frac{\sin x + \tan 2x}{3x}\right)$$

**II/**

1) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe un unique réel  $a_n$  appartenant à  $[0,1]$  tel que  $g(a_n) = a_n^n$ .

( On pourra considérer la fonction  $h_n(x) = g(x) - x^n$  )

2) a) Montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est croissante.

b) Dédire que la suite  $(a_n)_{n \geq 1}$  est convergente vers un réel  $\ell$ .

3) a) Supposons que  $\ell < 1$ ,

i) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n^n = 0$

ii) Dédire que  $g(\ell) = 0$

b) Conclure alors la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 13:(7 points)**

On considère la suite  $(v_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = \sqrt{v_n + \frac{1}{2^n}} \end{cases}$$

1) a) Déterminer  $v_1$  et  $v_2$ .

b) Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ ,  $v_n \geq 0$ .

2) a) Etudier les variations de la fonction  $f_n$  définie sur  $\mathbb{R}^+$

$$\text{pour } n \in \mathbb{N} \text{ par : } f_n(x) = x^2 - x - \frac{1}{2^n}.$$

b) Montrer que l'équation  $x^2 - x - \frac{1}{2^n} = 0$  possède dans  $\mathbb{R}^+$ , une unique solution  $\alpha_n$ .

c) Dédire que  $\alpha_n = \sqrt{\alpha_n + \frac{1}{2^n}}$ .

3) a) Etudier le signe de  $f_n(x) - f_{n+1}(x)$ .

b) En déduire le sens de variation de la suite  $(\alpha_n)$ .

4) a) Comparer les nombres  $(\alpha_2)^2$  et  $(v_2)^2$ .

b) Etablir par récurrence que pour tout  $n \geq 2$  on a  $v_n \geq \alpha_n$ .

c) En déduire que la suite  $(v_n)$  est décroissante pour  $n \geq 2$ .

5) a) Montrer alors que la suite  $(v_n)$  est convergente.

b) Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$ .

**Exercice 14:( 6 points )**

Les questions 1 et 2 sont indépendantes.

1) Soit  $u$  une suite à valeur dans  $]0, 1[$  telle que pour tout  $n$  :  $4u_{n+1} > \frac{1}{1-u_n}$ .

a) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .

b) Dédire que  $(u_n)$  est convergente.

c) Montrer que  $\lim(u_n) = \frac{1}{2}$ .

2) Soit  $v$  la suite à valeur dans  $\mathbb{R}^+$  définie par  $v_1=1$  et  $(v_{n+1})^2 = 1+v_n$ .

a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est croissante.

( On pourra utiliser un raisonnement par récurrence )

b) Montrer que pour tout  $n \geq 1$ ,  $1 \leq v_n \leq 2$ .

c) Prouver que la suite  $(v_n)$  est convergente vers une limite que l'on précisera.

d) Dédire alors la limite de la suite  $w$  définie par :

$$w_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{\dots + \sqrt{1}}}} ; (n \text{ fois } 1)$$

**Exercice 15 ( 5 points )**

soit  $(u_n)$  la suite réelle définie par : et pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} = \frac{n+u_n}{n^2}$

1) Montrer que si converge vers un réel  $l$  alors  $l = 0$ .

2) Soit  $(v_n)$  la suite réelle définie par : pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $v_n = \frac{n}{n^2-1}$

a) Montrer que la suite  $(v_n)$  est décroissante.

b) Montrer que pour tout entier  $n \geq 2$ ,  $v_n \leq u_n$

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante sur  $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

3) a) Montrer que pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $0 < u_n \leq 2$ .

b) En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ ,

$$\frac{1}{n} \leq u_{n+1} \leq \frac{n+2}{n^2}$$

c) Calculer alors  $\lim u_n$  et  $\lim nu_n$ .