Lycée Pilote de Sfax A/S 2019-2020	Série N°5 Suites réelles	Mr : Mourad EL arbi $4^{ème}$ $Math_4$

1 Soit (U_n) la suite definie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k}$.

① a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $2 - \frac{2}{n+1} \leq U_n \leq 2 + \frac{2}{n}$.

b) En déuire que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

② a) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $\sqrt{n} - \sqrt{n-1} \geq \frac{1}{2n}$.

b) En déduire que pour tout $n \geq 1$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 2\sqrt{n}$.

③ Pour tout $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} U_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2n - 4\sqrt{n+1} \leq S_n \leq 2n + 4\sqrt{n}$.

b) En déduire $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} S_n$.

2 On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

① Montrer que la suite (U_n) est croissante.

② a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2n} - U_n \leq \frac{1}{n}$.

b) En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $U_{2^{p+1}} - U_{2^p} \leq \frac{1}{2^p}$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{2^n} \leq 3$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $2^n > n$.

e) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

③ Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$. Sachant que $\lim_{n \to +\infty} V_n = \frac{\pi^2}{8}$, calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

3 On considère la suite (U_n) définie, pour $n \geq 2$ par $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.

① Calculer U_2, U_3 et U_4.

② Montrer que pour tout $n \geq 2$ et pour tout réel x, $\left(1 - e^{ix}\right)\left(1 + e^{ix} + e^{i2x} + \ldots + e^{i(n-1)x}\right) = 1 - e^{inx}$.

③ En déduire que pour tout $n \geq 2$, $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}$.

④ Vérifier que pour tout $n \geq 2$, $1 - e^{i\frac{\pi}{n}} = -2i\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right) e^{i\frac{\pi}{2n}}$.

⑤ En déduire que pour tout $n \geq 2$, $U_n = \frac{1}{n\tan\left(\frac{\pi}{2n}\right)}$.

⑥ Déterminer alors $\lim_{n \to +\infty} U_n$ ... prochée, de cette limite à 10^{-1}

موقع مراجعة باكالوريا
BAC.MOURAJAA.COM
bac Math