Lycée pilote de Tunis	**Suites réelles 2**	*Terminales maths*
Mr Ben Regaya. A	**+ Eléments de corrections**	*www.ben-regaya.net*

Exercice1

Soit α un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0,1[$ .On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{(1+\alpha)u_n - \alpha}{u_n} \end{cases}$$

1. a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geq 1$.

   b) Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et trouver sa limite.

2. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - \alpha}$.

   a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison α .

   b) Exprimer v_n en fonction de n et α .

   En déduire l'expression de u_n en fonction de n et α .

   c) Retrouver alors la limite de la suite (u_n).

Exercice2

Soit (u_n) et (v_n) deux suites réelles telles que $(u_n + v_n)$ et $(u_n - v_n)$ convergent.

Montrer que (u_n) et (v_n) convergent.

Exercice3

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = a$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} u_k}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{u_n + u_{n+1}}$. Conclure sur la monotonie de (u_n).

b) Déterminer la limite de (u_n).

c) Déterminer la limite de $u_{n+1} - u_n$.

Exercice4

Soit (u_n) une suite **croissante** de limite l. On pose $v_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} u_k}{n}$.

a) Montrer que (v_n) est croissante.

b) Etablir que $v_{2n} \geq \dfrac{u_n + v_n}{2}$.

c) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Exercice5

Utiliser les théorèmes de comparaisons pour déterminer les limites des sommes suivantes :

a) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k}$, b) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$, c) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n^2 + k^2}$, d) $s_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \dfrac{1}{k^2}$, e) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{n}{n^2 + k}$, f) $s_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{n^2 \dots}}$

Exercic6

Soit (u_n) une suite de réels **décroissante** et de **limite nulle**.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $S_n=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k$.

Montrer que les suites extraites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) sont adjacentes et en déduire que (s_n) converge.

Exercice7

Soit s la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

1. a) Montrer que pour tout $n\geq 1$; $s_n\geq \frac{n}{\sqrt{n}}$.

   b) La suite s est-elle convergente ?

2. Vérifier que pour tout entier $n\geq 1$, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$

3. On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=2\sqrt{n}-s_n$ et $v_n=u_n+\frac{1}{\sqrt{n}}$

   a)Démontrer que les suites u et v sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

   b) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{s_n}{2\sqrt{n}}$.

4. On pose $l=\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$ .Déterminer un entier p tel que u_p soit une valeur approchée de l à 0, 1 près.

Exercice8

Soit u la suite définie par : $u_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{k}{3^k}$.

1. Montrer que pour tout $n\succ 0$, $u_{2n+2}-u_{2n}=\frac{1}{3^{2n+2}}(-4n-1)$. En déduire la monotonie de la suite (u_{2n}).
2. Montrer que la suite (u_{2n+1}) est croissante.
3. a) Montrer que pour tout naturel non nul n, $2^n\succ n$.
   b) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_{2n}-u_{2n+1})$.
4. Montrer que la suite u converge vers un réel α tel que $u_3\prec\alpha\prec u_2$.

Exercice 9

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^k}$.

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $2^{n+1}(n+1)^n\geq n+2$.
3. Vérifier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_{n+1}-u_n=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+2)^{n+1}}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(n+k+1)^k}-\frac{1}{(n+k)^k}\right)$.

   En déduire que u est décroissante.

4. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n\leq\frac{1}{n}\left(1-\left(\frac{1}{n+1}\right)^n\right)$. En déduire la convergence de la suite u vers un réel que l'on calculera.

Exercice1

1. a)Raisonnons par récurrence :

Pour $n=0,\ u_0=2\geq 1$.

Soit n un entier naturel , supposons $u_n\geq 1$

$u_{n+1}-1=\dfrac{(1+\alpha)u_n-\alpha}{u_n}-1=\dfrac{(1+\alpha)u_n-\alpha-u_n}{u_n}=\dfrac{\alpha(u_n-1)}{u_n}\geq 0$ car $u_n\geq 1$ et donc $u_{n+1}\geq 1$.

On peut conclure que pour tout ℕ naturel $u_n\geq 1$.

b) Montrons que (u_n) est une suite décroissante.

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{(1+\alpha)u_n-\alpha}{u_n}-u_n=\dfrac{(1+\alpha)u_n-\alpha-u_n^2}{u_n}=\dfrac{-u_n^2+(1+\alpha)u_n-\alpha}{u_n}=-\dfrac{(u_n-1)(u_n-\alpha)}{u_n}$ et cette expression est négative compte tenu du fait que $u_n\geq 1$ et que α est un réel de $]0,1[$. On vient de prouver que la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et elle est minorée par 1 donc convergente.

Pour la limite de (u_n) :

On a : $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f(x)=\dfrac{(1+\alpha)x-\alpha}{x}$. f est rationnelle avec un dénominateur qui s'annule en 0 donc elle est continue en tout réel sauf zéro et donc elle est continue sur $[1,+\infty[$.

(u_n) est une suite d'éléments de $[1,+\infty[$ qui converge vers un réel l alors $l=f(l)$ et $l\geq 1$.

Or $f(x)=x\Leftrightarrow\dfrac{(1+\alpha)x-\alpha}{x}=x\Leftrightarrow x^2-(1+\alpha)x-\alpha=0$ et les solutions de cette équation sont 1 et α et comme $l\geq 1$ alors (u_n) converge vers 1.

2. a) Montrons que (v_n) est une suite géométrique de raison α.

La suite (v_n) est bien définie puisque $u_n\geq 1$ donc $u_n\neq\alpha$

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}-\alpha}=\frac{\dfrac{(1+\alpha)u_n-\alpha}{u_n}-1}{\dfrac{(1+\alpha)u_n-\alpha}{u_n}-\alpha}=\frac{(1+\alpha)u_n-\alpha-u_n}{(1+\alpha)u_n-\alpha-\alpha u_n}=\frac{\alpha(u_n-1)}{u_n-\alpha}=\alpha v_n.$$

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison α et de premier terme

$$v_1=\frac{u_1-1}{u_1-\alpha}=\frac{\dfrac{\alpha+2}{2}-1}{\dfrac{\alpha+2}{2}-\alpha}=\frac{\dfrac{\alpha}{2}}{\dfrac{-\alpha+2}{2}}=\frac{\alpha}{2-\alpha}.$$

b) La suite (v_n) étant géométrique de raison α et de premier terme $v_1 = \dfrac{\alpha}{2-\alpha}$ alors

$$v_n = v_1 \times (\alpha)^{n-1} = \frac{\alpha}{2-\alpha} \times (\alpha)^{n-1} = \frac{\alpha^n}{2-\alpha}.$$

Remarquons que $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - \alpha} \neq 1$ car $\alpha \neq 1$.

$v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n - \alpha} \Leftrightarrow (u_n - \alpha) v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow u_n (v_n - 1) = -1 + \alpha v_n$ et comme $v_n \neq 1$ alo

$$u_n = \frac{-1 + \alpha v_n}{v_n - 1} = \frac{-1 + \dfrac{\alpha^{n+1}}{2-\alpha}}{\dfrac{\alpha^n}{2-\alpha} - 1} = \frac{-2 + \alpha + \alpha^{n+1}}{\alpha^n - 2 + \alpha}.$$

c) On sait que $0 \prec \alpha \prec 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^{n+1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{-2+\alpha+\alpha^{n+1}}{\alpha^n - 2 + \alpha} = \dfrac{-2+\alpha}{-2+\alpha} = 1$.

On retrouve le résultat de 1. c)

Exercice2

Supposons $(u_n + v_n)$ converge vers l et $(u_n - v_n)$ converge vers l'.

$u_n = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) + \dfrac{1}{2}(u_n - v_n)$ converge vers $\dfrac{l + l'}{2}$. De même $v_n = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) + \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$ converge vers $\dfrac{l - l'}{2}$.

Exercice3

a) $u_{n+1} - u_n = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k} - \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k} = \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k} - \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k} = \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k - \sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k}{\sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n} u_k} + \sqrt{\sum\limits_{k=0}^{n-1} u_k}} = \dfrac{u_n}{u_{n+1} + u_n}$ et comme (u_n) est a

valeurs strictement positifs (facile à vérifier par récurrence) alors (u_n) est croissante.

b) (u_n) est croissante. Supposons que (u_n) est majorée donc (u_n) converge vers $l \in \mathbb{R}$.

On a : $l \geq u_1 = \sqrt{a} \succ 0$.

En passant la relation précédente à la limite : $0 = \dfrac{l}{l + l} = \dfrac{1}{2}$. C'est absurde. Par suite (u_n) est croissante et non majorée donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

c) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{u_n + u_{n+1}}$ donc $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \dfrac{1}{u_n + u_{n+1}} \to 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

$$\lim_{n\to+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1 + \dfrac{u_{n+1}}{u_n}} = \frac{1}{2}.$$

Exercice4

a) $v_{n+1} - v_n = v_n = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n+1} u_k}{n+1} - \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} u_k}{n} = \dfrac{(u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1})}{(n+1)} - \dfrac{(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)}{n}$

Donc $v_{n+1}-v_n=\dfrac{nu_{n+1}-(u_1+u_2+...+u_n)}{n(n+1)}$ et comme (u_n) est croissante donc u_{n+1} est plus grand que tous les termes d'indice inferieur à $n+1$ donc $nu_{n+1}\geq(u_1+u_2+...+u_n)$ et par suite (v_n) est croissante.

b) $v_{2n}=\dfrac{u_1+u_2+...+u_n}{2n}+\dfrac{u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{2n}}{2n}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\sum_{k=1}^{n}u_k}{n}\right)+\dfrac{u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{2n}}{2n}$. Mais

$u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{2n}\geq n\times u_n$ toujours car (u_n) est croissante et donc $\dfrac{u_{n+1}+u_{n+2}+...+u_{2n}}{2n}\geq\dfrac{n\times u_n}{2n}=\dfrac{u_n}{2}$.

Ainsi $v_{2n}\geq\dfrac{u_n+v_n}{2}$

c) On a $v_n\leq l$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et (v_n) croissante donc (v_n) converge vers un réel $l'\leq l$.

La relation précédente, passée à la limite, donne $2l'\geq l+l'\Leftrightarrow l'\geq l$ et donc $\Leftrightarrow l'=l$ .Ce qui permet de conclure $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=l$.

Exercice5

a) $s_n\geq\sum_{k=1}^{n}1=n\to+\infty$,

b) $s_n\geq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n}\to+\infty$,

c) $0\leq s_n\leq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n^2+1}=\dfrac{n}{n^2+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=0$,

d) $0\leq s_n\leq\sum_{k=n+1}^{2n}\dfrac{1}{(n+1)^2}\leq\dfrac{n}{(n+1)^2}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=0$,

e) $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+n}\leq s_n\leq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n^2+1}\Rightarrow\dfrac{n}{n+1}\leq s_n\leq\dfrac{n^2}{n^2+1}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=1$,

g) $\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\leq s_n\leq\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}s_n=1$,

Exercice6

$S_{2(n+1)}-S_{2n}=u_{2n+2}-u_{2n+1}\leq0$

$S_{2(n+1)+1}-S_{2n+1}=-u_{2n+3}-u_{2n+2}\geq0$ et $S_{2n+1}-S_{2n}=-u_{2n+1}\to0$

Les suites (s_{2n}) et (s_{2n+1}) étant adjacentes elles convergent vers une même limite et par suite (s_n) converge aussi vers cette limite.

Exercice7

1. a) Montrons que pour tout $n\geq1$; $s_n\geq\dfrac{n}{\sqrt{n}}$.

On a $1 \leq k \leq n \Leftrightarrow 1 \geq \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc par sommation :

$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow s_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}, \quad n \geq 1$.

b) On a : $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{\sqrt{n}} = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$ et $s_n \geq \frac{n}{\sqrt{n}}$ donc par comparaison $\lim_{n \to +\infty} s_n = +\infty$. La suite s diverge.

2. Montrons que pour tout entier $n \geq 1$, $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ .c'est tout simplement l'expression conjuguée.
3. Démontrons que les suites u et v sont adjacentes.

$u_{n+1} - u_n = \left(2\sqrt{n+1} - s_{n+1}\right) - \left(2\sqrt{n} - s_n\right) = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}} \succ 0$ .donc la suite u est croissante **(1)**

$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - u_n - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\sqrt{n+1}} \prec 0$ .donc la suite v est décroissante. **(2)**

$\lim_{n \to +\infty} u_n - v_n = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. **(3).**

De **(1) , (2)** et **(3)** on en déduit que les suites u et v sont adjacentes.
Déduction : u et v convergent vers la même limite.

b) Détermination de $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_n}{2\sqrt{n}}$.

$u_n = 2\sqrt{n} - s_n \Leftrightarrow s_n = 2\sqrt{n} - u_n \Leftrightarrow \frac{s_n}{2\sqrt{n}} = 1 - \frac{u_n}{2\sqrt{n}}$ et comme la suite u est convergente alors elle est bornée par suite il existe M constante réel telle que $|u_n| \leq M$ et par suite $\frac{|u_n|}{2\sqrt{n}} \leq \frac{M}{2\sqrt{n}}$ et comme $\lim_{n \to +\infty} \frac{M}{2\sqrt{n}} = 0$ alors par comparaison $\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{2\sqrt{n}} = 0$ et par conséquent $\lim_{n \to +\infty} \frac{s_n}{2\sqrt{n}} = 1$.

4. Détermination de l'entier p tel que u_p soit une valeur approchée de l à 0, 1 près.
   On sait que le réel l est tel que $u_n \leq l \leq v_n$ et donc $0 \leq l - u_n \leq v_n - u_n \Rightarrow |l - u_n| \leq v_n - u_n$ par suite pour avoir
   $|l - u_p| \leq 10^{-1}$ il suffit d'avoir $\frac{1}{\sqrt{p}} \leq 10^{-1} \Leftrightarrow \sqrt{p} \geq 10 \Leftrightarrow p \geq 100$. D'où u_{100} est une valeur approchée de l à 0, 1 près.

Exercice 8

1. $u_{2n+2} = \sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k \frac{k}{3^k} = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k \frac{k}{3^k} + (-1)^{2n+1} \frac{2n+1}{3^{2n+1}} + (-1)^{2n+2} \frac{2n+2}{3^{2n+2}} = u_{2n} - \frac{2n+1}{3^{2n+1}} + \frac{2n+2}{3^{2n+2}} =$.

   $u_{2n} - \frac{3(2n+1) + 2n+2}{3^{2n+2}} \Rightarrow u_{2n+2} - u_{2n} = \frac{1}{3^{2n+2}}(-4n-1) \leq 0$ et donc la suite (u_{2n}) est décroissante.

2. Faites de même pour la suite (u_{2n+1}).

3. a) D'après la formule de binôme $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(1)^k(1)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k=C_n^1+\sum_{\substack{k=0\\k\neq1}}^{n}C_n^k=n+\sum_{\substack{k=2\\k\neq1}}^{n+1}C_n^k\succ n$.

b) $u_{2n+1}=\sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k\frac{k}{3^k}=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k\frac{k}{3^k}+(-1)^{2n+1}\frac{2n+1}{3^{2n+1}}=u_{2n}-\frac{2n+1}{3^{2n+1}}\Rightarrow u_{2n}-u_{2n+1}=\frac{2n+1}{3^{2n+1}}$.

Or $\frac{2n+1}{3^{2n+1}}=\frac{1}{3^{2n+1}}+\frac{2n}{3^{2n+1}}$ et on sait que pour tout naturel non nul n, $2^n\succ n$ donc $2^{n+1}\succ 2n\Leftrightarrow\frac{2^{n+1}}{3^{2n+1}}\succ\frac{2n}{3^{2n+1}}$

ou encore $\frac{2\times2^n}{9^n\times3}\succ\frac{2n}{3^{2n+1}}\Leftrightarrow\frac{2n}{3^{2n+1}}\prec\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{9}\right)^n$. Ainsi $0\prec\frac{2n}{3^{2n+1}}\prec\frac{2}{3}\times\left(\frac{2}{9}\right)^n$ et par comparaison

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2n}{3^{2n+1}}=0\ \left(-1\prec\frac{2}{9}\prec1\right)$.

Finalement $\lim\limits_{n\to+\infty}u_{2n}-u_{2n+1}=0$.

4. Remarquer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes et conclure.

Exercice 9

Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^k}$.

1. $u_1=\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{(1+k)^k}=\frac{1}{2}$; $u_2=\sum_{k=1}^{2}\frac{1}{(2+k)^k}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4^2}$.

2. On a d'une part $2^{n+1}(n+1)^n\geq2^{n+1}$ car pour $n\in\mathbb{N}^*$, $(n+1)^n\geq1$ et d'autre part

$$2^{n+1}=(1+1)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k(1)^k(1)^{n+1-k}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k=C_{n+1}^0+C_{n+1}^1+\sum_{k=2}^{n+1}C_{n+1}^k=1+n+1+\sum_{k=2}^{n+1}C_{n+1}^k$$

$=n+2+\sum_{k=2}^{n+1}C_{n+1}^k\geq n+2$. (Formule de binôme).

3. On a $u_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(n+1+k)^k}=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+3)^2}+\frac{1}{(n+4)^3}+\ldots+\frac{1}{(2n+2)^{n+1}}$ et

$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(n+k)^k}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+2)^2}+\frac{1}{(n+3)^3}+\ldots+\frac{1}{(2n)^n}$

D'où $u_{n+1}-u_n=$

$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}+\left[\frac{1}{(n+3)^2}-\frac{1}{(n+2)^2}\right]+\left[\frac{1}{(n+4)^3}-\frac{1}{(n+3)^3}\right]+\ldots+\left[\frac{1}{(2n+1)^n}-\frac{1}{(2n)^n}\right]+\frac{1}{(2n+2)^{n+1}}$$

$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+2)^{n+1}}+\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(n+k+1)^k}-\frac{1}{(n+k)^k}\right)$. Or tous les termes de la forme

$\frac{1}{(n+k+1)^k}-\frac{1}{(n+k)^k}$ sont négatifs donc leur somme $\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{(n+k+1)^k}-\frac{1}{(n+k)^k}\right)$ l'est aussi et par suite

$u_{n+1}-u_n \le \frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(2n+2)^{n+1}} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}}$ et d'après la question précédente $2^{n+1}(n+1)^n \ge n+2 \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^n} \le \frac{1}{n+2} \Leftrightarrow \frac{1}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}} \le \frac{1}{(n+2)(n+1)}$ et par suite $\frac{1}{2^{n+1}(n+1)^{n+1}} - \frac{1}{(n+2)(n+1)} \le 0$. Finalement $u_{n+1}-u_n \le 0$ et donc la suite u est décroissante.

4. On a pour k entier compris entre 1 et n ; $\frac{1}{(n+k)^k} \le \frac{1}{(n+1)^k}$ et par sommation entre 1 et n on aura $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^k} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+1)^k}$ et donc $u_n \le \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^n}$.

Posons $s_n = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^n}$.

on multiplie par $\frac{1}{n+1}$, on aura $\left(\frac{1}{n+1}\right)\times s_n = \frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\ldots+\frac{1}{(n+1)^n}+\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et par différence $s_n - \left(\frac{1}{n+1}\right)\times s_n = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^{n+1}} \Leftrightarrow \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\times s_n = \frac{1}{n+1}-\frac{1}{(n+1)^{n+1}}$ et donc $s_n = \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^n}\right)$

Ainsi $0 \le u_n \le \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{(n+1)^n}\right)$ et par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.