Lycée pilote de Tunis	Suites réelles 1	Terminales maths
Mr Ben Regaya. A	+ Eléments de corrections	www.ben-regaya.net

Exercice1

Soit la suite *t* définie pour $n \succ 0$ par : $t_n = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

1. Montrer que *t* est décroissante et minorée. Conclure.

2. Montrer que pour tout naturel $n \succ 0$: $t_{n+1} = \dfrac{1}{2}t_n + \dfrac{1}{2^n}$. En déduire la limite de la suite *t*.

3. On définit sur ℕ* la suite *u* par : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{k}{2^{k-1}} = 1 + \dfrac{2}{2^1} + \dfrac{3}{2^2} + ... + \dfrac{n}{2^{n-1}}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $u_n = 4\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right) - t_n$. En déduire la limite de la suite *u*.

Exercice2

1. Soit *x* un réel positif, montrer que pour tout naturel *n* on a : $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

2. Soit *u* la suite définie sur ℕ* par : $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

   a) Montrer que $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

   b) Montrer que la suite *u* est convergente.

   c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}u_n$ puis calculer la limite de *u*.

Exercice3

Soit *u* la suite définie sur ℕ* par : $u_1 = 2$ et pour tout naturel *n* non nul $u_{n+1} = 2 + \dfrac{n^2}{u_n}$.

1. a) Montrer que pour tout naturel $n \geq 2$; $n \prec u_n \prec n+1$, déduire la limite de la suite *u*.

   b) Montrer que la suite *u* est croissante.

2. Soit *v* la suite définie sur ℕ* par : $v_n = \dfrac{1}{-n + u_n} - 1$.

a) Calculer v_1 et montrer que $v_{n+1} = \dfrac{1}{v_n + \dfrac{1}{n}}$.

b) Montrer, en utilisant un raisonnement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \dfrac{1}{n} \le v_n \le 1$.

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - n)$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k\, v_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $s_n - \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{1}{n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} k\,(v_k - 1)$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\left| s_n - \dfrac{n+1}{2n} \right| \le \dfrac{1}{n}$.

c) Montrer alors que la suite (s_n) converge vers un réel que l'on déterminera.

Exercice4

Soit la suite (u_n) défnie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum\limits_{k=0}^{2n+1} \dfrac{n}{n^2 + k}$.

1. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{2n}{n+1} \le u_n \le \dfrac{2n+2}{n}$.

b) En déduire la convergence de (u_n) et calculer sa limite.

2. a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\dfrac{1}{2n} \le \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

b) Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \le 2\sqrt{n}$.

3. Soit $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2n - 2\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n+1} \right) \le s_n \le 2n + 2\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \ldots + \dfrac{1}{n} \right)$

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $2n - 4\sqrt{n+1} \le s_n \le 2n + 4\sqrt{n}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{s_n}{n}$.

Exercice1

1. $n \succ 0 \Rightarrow t_n \succ 0$

$\dfrac{t_{n+1}}{t_n} = \dfrac{\frac{n+1}{2^n}}{\frac{n}{2^{n-1}}} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n+1}{n+n} \le 1 \quad (n \ge 1)$. Donc (t_n) est décroissante, comme elle est minorée par 0 donc converge.

2. $\dfrac{1}{2}t_n + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{1}{2}\dfrac{n}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^n} = \dfrac{n+1}{2n} = t_{n+1}$. Par passage a la limite dans la dernière égalité et posons $l = \lim\limits_{n\to+\infty} t_n$ on aura $\dfrac{1}{2}l + 0 = 0 \Rightarrow l = 0$. Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$.

3. On a $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} t_k$ et $\forall k \succ 0 \quad t_{k+1} = \dfrac{1}{2}t_k + \dfrac{1}{2}k$ et donc par sommation $\sum\limits_{k=1}^{n-1} t_{k+1} = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n-1} t_k + \sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{1}{2^k}$.

Ainsi $u_n - 1 = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(u_n - t_n) + 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$u_n - 1 = \dfrac{1}{2}u_{n-1} + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} \Leftrightarrow u_n - 1 = \dfrac{1}{2}(u_n - t_n) + 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}u_n = -\dfrac{1}{2}t_n + 2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\Leftrightarrow u_n = -t_n + 4 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2} \Leftrightarrow u_n = -t_n + 4\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0 \left(-1 \prec \dfrac{1}{2} \prec 1\right)$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 2

1. Pour x réel positif, montrons par récurrence que pour tout naturel n on a : $(1+x)^n \ge 1+nx$.

D'après la formule de Binôme $(1+x)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k\, x^k = C_n^0 + xC_n^1 + \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k\, x^k = 1 + nx + \sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k\, x^k \ge 1 + nx$

compte tenu du fait que $\sum\limits_{k=2}^{n} C_n^k\, x^k \ge 0$.

2. a) $\dfrac{u_n}{u_{n+1}} = \dfrac{\frac{n!}{n^n}}{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}} = \dfrac{n!}{n^n} \times \dfrac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \dfrac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \dfrac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

b) Remarquer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \succ 1$ et conclure que la suite u est décroissante et comme elle a termes positifs donc elle converge.

c) D'après la question 1. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \geq 1+n\times\frac{1}{n}=2$ et donc $u_{n+1}\leq\frac{1}{2}u_n$ et comme la suite u est convergente, par passage à la limite et on posons $l=\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ on aura $l\leq\frac{1}{2}l\Rightarrow l\leq 0$ et comme la suite u est a termes positifs alors $l\geq 0$ ce qui donne $l=0$. Conclusion $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=0$

Exercice3

1. a) récurrence $u_2=2+\frac{1}{u_1}=\frac{5}{2}\Rightarrow 2\leq u_2\leq 3$ vrai pour $n=2$.

   Supposons pour $n\geq 2$; $n\prec u_n\prec n+1$ et montrons que $n+1\prec u_{n+1}\prec n+2$.

   On a $n\prec u_n\prec n+1\Leftrightarrow \frac{1}{n+1}\prec\frac{1}{u_n}\prec\frac{1}{n}$ $(n\succ 0)\Leftrightarrow\frac{n^2}{n+1}\prec\frac{n^2}{u_n}\prec n\Leftrightarrow 2+\frac{n^2}{n+1}\prec u_{n+1}\prec 2+n$.

   Or $2+\frac{n^2}{n+1}-(n+1)=\frac{1}{n+1}\succ 0\Rightarrow 2+\frac{n^2}{n+1}\succ n+1$. On obtient finalement $n+1\prec u_{n+1}\prec n+2$.

   Conclusion $\forall n\geq 2$; $n\prec u_n\prec n+1$.

   On $\forall n\geq 2$; $n\prec u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.

   b) On a : $n+1\prec u_{n+1}\prec n+2$ et $-n-1\prec -u_n\prec -n$ donc par sommation des deux inégalités on aura :

   $0\prec u_{n+1}-u_n$ et donc (u_n) est croissante.

2. a) On a $v_1=\frac{1}{-1+u_1}-1=\frac{1}{1}-1=0$. D'autre part $v_n+\frac{1}{n}=\frac{1}{-n+u_n}-1+\frac{1}{n}=\frac{n^2+u_n(1-n)}{n(u_n-n)}$

   $\Rightarrow\frac{1}{v_n+\frac{1}{n}}=\frac{n(u_n-n)}{n^2+u_n(1-n)}-1+\frac{1}{n}=\frac{n^2+u_n(1-n)}{n(u_n-n)}$.

   D'autre part $v_{n+1}=\frac{1}{-(n+1)+2+\frac{n^2}{u_n}}-1=\frac{u_n}{n^2+u_n(1-n)}-1=\frac{u_n-\left[u_n-nu_n+n^2\right]}{u_n(1-n)+n^2}=\frac{nu_n-n^2}{n^2+u_n(1-n)}$.

   Ainsi $v_{n+1}=\frac{1}{v_n+\frac{1}{n}}$.

   b) Pour $n=1$, $v_1=0\Rightarrow 1-\frac{1}{1}\leq v_1\leq 1$.

   Supposons pour $n\geq 1$; $1-\frac{1}{n}\leq v_n\leq 1$ et montrons que $1-\frac{1}{n+1}\leq v_{n+1}\leq 1$.

   On a pour $n\geq 1$; $1-\frac{1}{n}\leq v_n\leq 1\Leftrightarrow 1\leq\frac{1}{n}+v_n\leq 1+\frac{1}{n}\Leftrightarrow 1\leq\frac{1}{n}+v_n\leq\frac{n+1}{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{\frac{1}{n}+v_n} \leq 1 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{n+1} \leq v_{n+1} \leq 1.$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1-\frac{1}{n} \leq v_n \leq 1$.

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\frac{1}{n}=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} v_n=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{-n+u_n}-1=1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} -n+u_n=\frac{1}{2}$.

3. a) $\sum_{k=1}^{n} k\,(v_k-1)=\sum_{k=1}^{n} k\,v_k-\sum_{k=1}^{n} k=\sum_{k=1}^{n} k\,v_k-\frac{n(n+1)}{2}$.

$\Leftrightarrow \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,(v_k-1)=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k\,v_k-\frac{(n+1)}{2n}$ d'oun le résultat.

b) $\left|s_n-\frac{n+1}{2n}\right|=\frac{1}{n^2}\left|\sum_{k=1}^{n} k\left(v_k-1\right)\right| \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\left|k\left(v_k-1\right)\right|$.

Or pour $k \geq 1$; $1-\frac{1}{k} \leq v_k \leq 1 \Leftrightarrow k-1 \leq kv_k \leq k \Leftrightarrow -1 \leq kv_k-k \leq 0 \Rightarrow |kv_k-k| \leq 1$

D'où $\left|s_n-\frac{n+1}{2n}\right| \leq \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} 1 \leq \frac{1}{n}$.

c) $-\frac{1}{n}+\frac{n+1}{2n} \leq s_n \leq \frac{1}{n}+\frac{n+1}{2n}$ et par comparaison $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n=\frac{1}{2}$.

Exercice4

1. a) On a $0 \leq k \leq 2n+1 \Leftrightarrow n^2 \leq n^2+k \leq n^2+2n+1 \Leftrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n^2+k} \leq \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \frac{n}{(n+1)^2} \leq \frac{n}{n^2+k} \leq \frac{1}{n}$ et

donc par sommation entre 0 et $2n+1$, on aura $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{(n+1)^2} \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{n}{n^2+k} \leq \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{1}{n}$ (le nombres de termes que comporte chaque somme est $2n+2$) on obtient $\frac{n(2n+2)}{(n+1)^2} \leq u_n \leq \frac{(2n+2)}{n} \Leftrightarrow \frac{2n}{(n+1)} \leq u_n \leq \frac{(2n+2)}{n}$

b) On a $\frac{2n}{n+1} \leq u_n \leq \frac{2n+2}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n}{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{n}}=2$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+2}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{2}{n}=2$ alors par comparaison la suite u converge et sa limite 2.

2. a) On a Pour n naturel non nul, $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}=\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ expression conjugueé.

aussi $\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\leq n+n=2n \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}\geq\frac{1}{2n}$ et donc $\sqrt{n}-\sqrt{n-1}\geq\frac{1}{2n}$.

b) **Déduction :**

On a pour tout naturel k non nul $\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\geq\frac{1}{2k}\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\geq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}$.

Or $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}-\sqrt{k-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}+\sqrt{n-1}-\sqrt{n-2}+...+\sqrt{1}-\sqrt{0}=\sqrt{n}$

et $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$.

Ainsi pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\leq 2\sqrt{n}$.

3. D'après la question 1., on sait que que pour tout $k\in\mathbb{N}^*$: $\frac{2k}{k+1}\leq u_k\leq\frac{2k+2}{k}=2+\frac{2}{k}$.

qu'on peut écrire $\frac{2k+2-2}{k+1}\leq u_k\leq 2+\frac{2}{k}\Leftrightarrow 2-\frac{2}{k+1}\leq u_k\leq 2+\frac{2}{k}$ et donc par sommation entre 1 et n, on

aura : $\sum_{k=1}^{n}2-\frac{2}{k+1}\leq\sum_{k=1}^{n}u_k\leq\sum_{k=1}^{n}2+\frac{2}{k}\Leftrightarrow 2n-\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+1}\leq s_n\leq 2n+\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k}$ .Le résultat en découle.

b) On a pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\leq 2\sqrt{n}$ donc $2n+2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}\right)\leq 2n+4\sqrt{n}$

aussi $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\leq 2\sqrt{n+1}\Rightarrow\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\leq 2\sqrt{n+1}$

$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\leq 2\sqrt{n+1}\Leftrightarrow -2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)\geq -4\sqrt{n+1}$

$\Leftrightarrow 2n-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n+1}\right)\geq 2n-4\sqrt{n+1}$

Finalement on obtient pour tout $n\in\mathbb{N}^*$: $2n-4\sqrt{n+1}\leq s_n\leq 2n+4\sqrt{n}$

$$\frac{2n-4\sqrt{n+1}}{n}\leq\frac{s_n}{n}\leq\frac{2n+4\sqrt{n}}{n}\Leftrightarrow 2-\frac{4\sqrt{n+1}}{n}\leq\frac{s_n}{n}\leq 2+\frac{4\sqrt{n}}{n}\Leftrightarrow 2-4\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}\leq\frac{s_n}{n}\leq 2+\frac{4}{\sqrt{n}}$$

Par le théorème de comparaison on déduit facilement que $\lim_{n\to+\infty}\frac{s_n}{n}=2$.