LYCEE PILOTE SFAX	SERIE D'EXERCICES N°	Mr MEGDICH
		3ème MATH

EXERCICE N°1

1) Représenter la courbe de la fonction f définie sur $]-2,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{4x}{x+2}$ et la droit $\Delta : y = x$.

Le réel $a \in]2,+\infty[$ .On désigne par (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = a, \\ u_{n+1} = f(u_n). \end{cases}$

2°/ Placer sur l'axe des abscisses les réels u_1, u_2 et u_3.

3°/ Que peut-on conjecturer sur la monotonie de la suite (u_n) et de sa convergence ?

4°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 2$.

5°/ Prouver la conjecture de la monotonie de la suite (u_n).

6°/ Dans cette question on pose $a = 4$.

On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 1 - \dfrac{2}{u_n}$.

a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

d. Calculer, en fonction de n, $S_n = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{1}{u_1} + \ldots + \dfrac{1}{u_n}$, $n \in \mathbb{N}$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

EXERCICE N°2

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \dfrac{n^{10}}{2^n}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10}$.

2. Soit g la fonction définie sur $[1,+\infty[$ par $g(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{10}$.

Montrer que la fonction g est strictement décroissante sur $[1,+\infty[$.

3.a. Montrer que pour tout $n \geq 14$, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{10} \leq 2$.

b. Soit (V_n) la suite définie par $V_n = U_n$, $n \geq 14$.

Montrer que la suite (V_n) est décroissante.

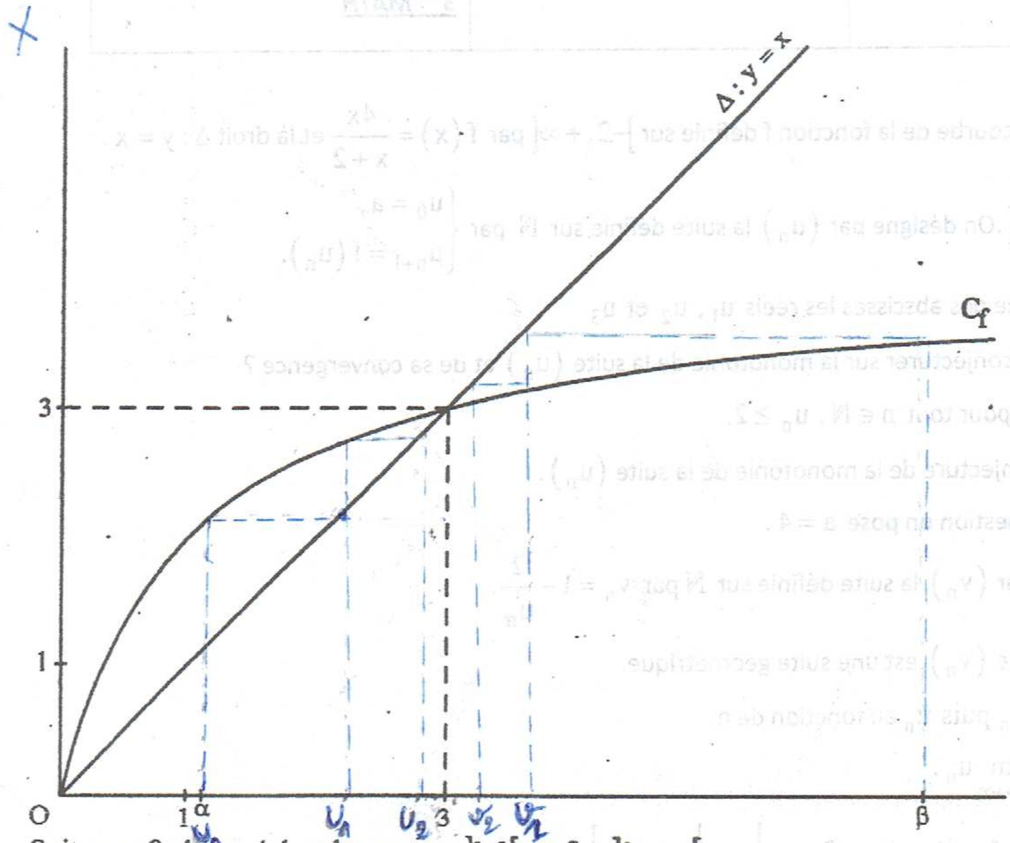
~~c. En déduire que la suite (U_n) est convergente.~~

4.a. Montrer que pour tout $n \geq 16$, $U_{n+1} \leq 0{,}95\, U_n$.

b. Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 16$, $U_n \leq (0{,}95)^{n-16}\, U_{16}$.

EXERCICE

Dans le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé la courbe de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x}{x+1}$ et la droite $\Delta : y = x$.



Soit α et β deux réels tels que $\alpha \in]1,3[$ et $\beta \in]3,+\infty[$.

On désigne par (u_n) et (v_n) les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \alpha, \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} v_0 = \beta, \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases}$

1°/ Représenter sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n).

2°/ a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 < u_n < 3$.

b. Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c. Soit (t_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $t_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n}$.

Montrer que (t_n) est une suite géométrique.

d. Exprimer t_n puis u_n en fonction de n et de α.

e. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

3°/ a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 3$.

b. Montrer que la suite (v_n) est décroissante.

c. Soit (w_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = v_n - u_n$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} < \dfrac{1}{2} w_n$

d. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n \leq (\beta - \alpha)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$.

e. Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.