CHABCHOUB Taïeb
D: 74 292 291 - B: 74 402 788
P: 98 251 593 - 20 251 593

Ex 1) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2+U_n}{\sqrt{8+U_n^2}} \ (\forall n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

1°) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 \leqslant U_n < 1$

2°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} \geqslant \dfrac{2+U_n}{3}$

b) En déduire que U est convergente

c) Montrer que la suite V définie par $V_n = \sum_{k=0}^{k=n} (3U_{k+1} - U_k)$ est divergente

3°) a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad 0 < 1 - U_{n+1} \leqslant \frac{1}{3}(1 - U_n)$

b) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}. \quad 0 < 1 - U_n \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^n$ calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

4°) On pose $W_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} U_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ Montrer que la suite $W = (W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Ex 2) On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{2}{U_n} \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1°) a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $U_n \geqslant 1$

b) Montrer que la suite U est croissante.

c) Montrer que U_n diverge vers $+\infty$

2°) Pour tout n de $\mathbb{N}$ on pose $V_n = \dfrac{U_n^2}{4}$

a) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $V_{n+1} - V_n \geqslant 1$

b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a $V_n \geqslant n$. Déduire la limite de (V_n)

c) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$ on a : $1 \leqslant V_{n+1} - V_n \leqslant 1 + \dfrac{1}{4n}$. Déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} (V_{n+1} - V_n)$

Ex 3) 1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a $0 < f(x) \leq x$

2°) Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{\sqrt{1+U_n}} \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $U_n > 0$

b) Montrer que la suite U est décroissante

c) En déduire que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

3°) Soit la suite $V = (V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $\begin{cases} V_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad V_{n+1} = \dfrac{V_n}{U_n} \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_{n+1} \geqslant \sqrt{2}\, V_n$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad V_n \geqslant \dfrac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{2})^n$. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$

4°) a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $f(x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq S_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

d) En déduire que (S_n) est une suite convergente et calculer sa limite.